

الأعداد الأولية

تعريف : نقول عن عدد طبيعي n أنه أولي إذا و فقط إذا كان له قاسمين فقط هما 1 و n ($n \neq 1$)
خاصية : لإثبات أن عدد طبيعي n أولي نتبع الخطوات التالية :

- 1 - إذا كان \sqrt{n} عدد طبيعي فإن n ليس أولي .
- 2 - إذا كان \sqrt{n} ليس عدد طبيعي نبحث عن المجموعة A من كل الأعداد الأولية الأصغر من \sqrt{n}
- 3 - إذا كانت كل عناصر المجموعة A لا تقسم n فإن n أولي (ماعدا 1)
- 4 - إذا وجد عنصر من المجموعة A يقسم العدد n فإن n ليس أولي .

مثال : هل العدد 341 أولي ؟

1 - $\sqrt{341} = 18,4$ إذن : $\sqrt{341}$ ليس عدد طبيعي .

2 - $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$

3 - بما أن العدد 11 يقسم 341 لأن $341 = 31 \times 11$ فإن 341 ليس أولي .

نشاط : n عدد طبيعي أكبر تماما من 3 . نضع $a = n^2 - 2n - 8$
 هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها a عددا أوليا

الحل : لاحظ أن : $n^2 - 2n - 8 = (n - 4)(n + 2)$ حيث $\left. \begin{matrix} (n - 4) \text{ عدد طبيعي لأن } n \geq 4 \\ n + 2 \text{ عدد طبيعي} \end{matrix} \right\}$

إذن : العدد a يحلل إلى جداء عددين طبيعيين هما $(n + 2)$ و $(n - 4)$

إذن : حتى يكون a أولي يجب أن يكون $\left. \begin{matrix} n - 4 = 1 \\ n + 2 \end{matrix} \right\}$ أولي

أي $\left. \begin{matrix} n = 5 \\ 7 \end{matrix} \right\}$ أولي (محقق)

نتيجة : يكون a أولي إذا و فقط إذا كان $n = 5$

ملاحظة :

✓ العدد 0 ليس أولي

✓ 1 ليس أولي لأن العدد 1 له قاسم واحد فقط هو نفسه .

✓ العدد 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد .

✓ مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية غير منتهية أصغر عنصر منها هو 2

و من بينها : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots$

مبرهنة : كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية بطريقة وحيدة .

مثال : 24 ليس أولي إذن يمكن تحليل 24 كمايلي $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

نتيجة مباشرة : a و b عدنان طبيعيين حيث $a > 1$ و $b > 1$

يكون b قاسما لـ a إذا و فقط إذا كانت كل العوامل الأولية في تحليل b توجد

في تحليل العدد a بشرط أن يكون الأس في b أصغر أو يساوي الأس في a

مثلا : $72 = 2^3 \times 3^2$

$18 = 2 \times 3^2$

لاحظ أن كل عوامل تحليل 18 توجد في تحليل 72 بأس أصغر من الأس الذي يظهر في تحليل 72

نشاط : البحث عن قواسم عدد طبيعي إنطلاقا من تحليله إلى عوامل أولية

ليكن n عدد طبيعي يحلل إلى جداء عوامل أولية كمايلي :

$n = a_1^{b_1} \times a_2^{b_2} \times \dots \times a_p^{b_p}$ حيث a_1, a_2, \dots, a_p أعداد طبيعية أولية متميزة متتالية و b_1, b_2, \dots, b_p أسس طبيعية

عدد قواسم العدد n هو الجداء $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_p + 1)$

مثال : $n = 735$

بإجراء التحليل : $735 = 3 \times 5 \times 7^2$

إذن : عدد قواسم 735 هو $(1+1)(1+1)(2+1) = 12$ البحث عنها :

735	3
245	5
49	7
7	7
1	

الجداء	7	5	3
3^0	7^0	5^0	1
	7^1		7
	7^2		49
	7^0	5^1	5
	7^1		35
	7^2		245
3^1	7^0	5^0	3
	7^1		21
	7^2		147
	7^0	5^1	15
	7^1		105
	7^2		735

نتيجة : قواسم العدد 735 هي $\{1; 7; 49; 5; 35; 245; 3; 21; 147; 15; 105; 735\}$ و عددها 12

المضاعف المشترك الأصغر لعددتين طبيعيتين غير معدومين

تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . نسمي M_a مجموعة مضاعفات العدد a

و M_b مجموعة مضاعفات العدد b

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b .

أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

و نرمز له بـ $\text{PPCM}(a; b)$

ملاحظات : الرمز PPCM يعني plus petit commun multiple

$$\text{PPCM}(a; a) = a$$

$$\text{PPCM}(1; a) = a$$

أمثلة : مضاعفات 6 هي $\{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; \dots\}$

مضاعفات 8 هي $\{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48; \dots\}$

المضاعفات المشتركة لـ 6 و 8 هي $\{0; 24; 48; 72; \dots\}$

إذن : $\text{PPCM}(6; 8) = 24$

تعميد : إذا كان a ، b عددان صحيحان فإن $\text{PPCM}(a; b) = \text{PPCM}(|a|; |b|)$

خاصية أساسية : a و b عددان طبيعيان غير معدومين

إذا كان k عدد صحيح غير معدوم فإن $\text{PPCM}(k a; k b) = |k| \times \text{PPCM}(a; b)$

نشاط : عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $\text{PPCM}(56; a) = 280$

الحل : 280 مضاعف لـ a إذن : a يقسم 280

لنبحث عن قواسم العدد 280 باستعمال التحليل :

إذن : $280 = 2^3 \times 5 \times 7$

إذن : a يكتب من الشكل $2^x \times 5^y \times 7^z$ حيث $x \in \{0; 1; 2; 3\}$

$z \in \{0; 1\}$ ، $y \in \{0; 1\}$

بما أن $\text{PPCM}(56; a) \neq 56$ فإن a لا يقسم 56

إذن : $y = 1$ لأن 5 لا يقسم 56

منه : القيم الممكنة لـ a هي ، كمايلي :

$\{5; 35; 10; 70; 20; 140; 40; 280\}$

56	2	280	2
28	2	140	2
14	2	70	2
7	7	35	5
1		7	7

2	7	5	A
2^0	7^0	5^1	5
	7^1	5^1	35
2^1	7^0	5^1	10
	7^1	5^1	70
2^2	7^0	5^1	20
	7^1	5^1	140
2^3	7^0	5^1	40
	7^1	5^1	280

تمرين : n عدد طبيعي غير معدوم .

a و b عدنان طبيعيان حيث : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n)$ و $b = 11^n(3^{n+1} - 3^n)$

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

الحل : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n) = 3^n \times 11^n(11^2 - 1) = (3 \times 11)^n \times 120$

$b = 11^n(3^{n+1} - 3^n) = 11^n \times 3^n(3 - 1) = (3 \times 11)^n \times 2$

منه : $\text{ppcm}(a; b) = \text{ppcm}(33^n \times 120; 33^n \times 2) = 33^n \times \text{ppcm}(120; 2)$

إذن : $\text{ppcm}(a; b) = 120 \times 33^n$ لأن $\text{ppcm}(120; 2) = 120$

القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر :

للبحث عن القاسم المشترك الأكبر أو المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b نتبع الطريقة التالية :

1 - نحلل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية بأسس طبيعية

2 - القاسم المشترك الأكبر لـ a و b هو جداء العوامل المشتركة فقط مأخوذة بأصغر أس .

3 - المضاعف المشترك الأدنى لـ a و b هو جداء كل العوامل مأخوذة بأكبر أس .

288	2	560	2
144	2	280	2
72	2	140	2
36	2	70	2
18	2	35	5
9	3	7	7
3	3	1	
1			

أمثلة : $a = 560$ ، $b = 288$

إذن : $560 = 2^4 \times 5 \times 7$

$288 = 2^5 \times 3^2$

يوجد عامل مشترك واحد فقط هو 2 و أسه الأصغر هو 4

$\text{PGCD}(560; 288) = 2^4 = 16$

العوامل التي تظهر في تحليل العددين هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7

و أسسها الكبرى على الترتيب 5 ، 2 ، 1 ، 1

إذن : $\text{ppcm}(560; 288) = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$

خاصية أساسية :

a و b عدنان طبيعيان حيث $a > 1$ و $b > 1$

$\text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b) = a \times b$

مثال : عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $a \times b = 18000$ و $\text{ppcm}(a; b) = 600$

الحل : $a \times b = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)$

إذن : $\text{pgcd}(a; b) = \frac{a \times b}{\text{ppcm}(a; b)}$

أي $\text{pgcd}(a; b) = \frac{18000}{600} = 30$

نضع $a = 30x$ و $b = 30y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $a \times b = 18000$ تكافئ $30x \times 30y = 18000$

تكافئ $xy = 20$

تكافئ $(x; y) \in \{(1; 20); (4; 5); (5; 4); (20; 1)\}$

نتيجة : $(a; b) \in \{(30; 600); (120; 150); (150; 120); (600; 30)\}$

مبرهنة بيزو

يكون عدنان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عدنان صحيحان α و β حيث $a\alpha + b\beta = 1$

مثال : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$5(4n - 3) - 4(5n - 4) = 20n - 15 - 20n + 16 = 1$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha; \beta) = (5; -4)$ من الأعداد الصحيحة تحقق $\alpha(4n-3) + \beta(5n-4) = 1$
منه : العددان $(4n-3)$ و $(5n-4)$ أوليان فيما بينهما .

خواص أساسية :

1 - كل عدد أولي a هو أولي مع كل الأعداد ماعدا مضاعفاته

2 - إذا كان $\text{pgcd}(a; b) = d$ فإن توجد ثنائية $(\alpha; \beta)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تحقق : $\alpha a + \beta b = d$

3 - إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع الجداء bc
مبرهنة غوص :

a, b, c أعداد صحيحة غير معدومة

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أولي مع b فإن a يقسم c

تطبيق المبرهنة :

1 - تحقق أن الثنائية $(4; 2)$ هي حل للمعادلة ذات المجهولين x, y التالية :

$$9x - 16y = 4 \quad (E)$$

2 - استنتج كل حلول المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

الحل :

1 - من أجل $(x; y) = (4; 2)$ نحصل على : $9(4) - 16(2) = 36 - 32 = 4$

إذن : فعلا الثنائية $(4; 2)$ هي حل للمعادلة (E)

2 - لتكن الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) إذن : $9x - 16y = 4$

$$9(4) - 16(2) = 4$$

$$9x - 16y = 9(4) - 16(2)$$

$$9(x) - 9(4) = 16y - 16(2)$$

$$9(x-4) = 16(y-2)$$

$$9(x-4) = 16(y-2)$$

$$9(x-4) = 16(y-2)$$

$$9(x-4) = 16(y-2)$$

$$9(x-4) = 16(y-2)$$

$$9(16k+4) - 16y = 4 \quad (E)$$

$$9 \times 16k + 36 - 16y - 4 = 0$$

$$9 \times 16k + 32 = 16y$$

$$y = 9k + 2$$

نتيجة : حلول المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ هي الثنائيات $(x; y)$ حيث

$$x = 16k + 4 \quad \text{و} \quad y = 9k + 2 \quad \text{حيث } k \text{ عدد صحيح}$$

خواص : a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة

1 - إذا كان p عدد طبيعي أولي يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b

2 - إذا كان a مضاعف b فإن a مضاعف للجداء bc

b و c أوليان فيما بينهما

تطبيق : n عدد طبيعي . نضع $A = n(5n+1)(13n+1)$

برهن أن A يقبل القسمة على 6

الحل : يمكن إثبات أن A مضاعف 6 كمايلي : (1) نثبت أن A مضاعف 2

(2) نثبت أن A مضاعف 3

نتيجة : بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A مضاعف 2×3

هل A مضاعف 2 ؟

إذا كان n زوجي فإن A مضاعف 2 لأن $A = n(5n+1)(13n+1)$

إذا كان n فردي فإن $(5n+1)$ زوجي إذن : A مضاعف 2

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن A مضاعف 2

هل A مضاعف 3 ؟

إذا كان n مضاعف 3 فإن A مضاعف 3 لأن $A = n(5n+1)(13n+1)$

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن $5n + 1 = 15k + 6 = 3(5k + 2)$ إذن : $5n + 1$ مضاعف 3
 إذا كان $n = 3k + 2$ فإن $13n + 1 = 39k + 27 = 3(13k + 9)$ إذن : $13n + 1$ مضاعف 3
 نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن A مضاعف 3

خلاصة : A مضاعف 2 }
 A مضاعف 3 }
 إذن : A مضاعف 6
 2 و 3 أوليان فيما بينهما

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1 -

عين قائمة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100

الحل - 1

لتكن A مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100
 $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97\}$

التمرين 2 -

1 - ما هو عدد عمليات القسمة التي يمكن إجراؤها على الأعداد الأولية المتتالية لمعرفة

ما إذا كان العدد 1429 أوليا أم لا ؟

2 - بين أن العدد 1429 أولي

الحل - 2

1 - لدينا $\sqrt{1429} \approx 37,8$

قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 38 هي $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37\}$

إذن : عدد عمليات القسمة التي يمكن إجراؤها هو 12 (عدد الأعداد الأولية الأصغر من 38)

2 - بإجراء القسمة الإقليدية للعدد 1429 على كل من الأعداد الأولية الأصغر من 38 لا نجد أي قاسم له إذن : 1429 أولي

التمرين 3 -

أثبت أن العدد 853 أولي

الحل - 3

$\sqrt{853} \approx 29,2$ منه جدول بواقي قسمة 853 على الأعداد الأولية الأصغر من 30

n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
$853 \equiv ?[n]$	1	1	3	6	6	8	3	17	2	12

نتيجة : كل الأعداد الأولية الأصغر من 30 لا تنقسم 853 إذن : 853 أولي

التمرين 4 -

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إذا كان العدد أوليا أم لا

1023 341 251

الحل - 4

$\sqrt{251} \approx 15,84$

n	2	3	5	7	11	13
$251 \equiv ?[n]$	1	2	1	6	9	4

إذن : العدد 251 أولي

$\sqrt{341} \approx 18,4$

n	2	3	5	7	11	13	17
$341 \equiv ?[n]$	1	2	1	5	0	3	1

$341 \equiv 0[11]$ إذن : 341 ليس أولي .

$$\sqrt{1023} \approx 31,98$$

n	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$1023 \equiv ?[n]$	1	0	توقف						

$1023 \equiv 0[3]$ إذن : 1023 ليس أولي

التمرين 5-

تعرف على الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية :

937 ، 3705 ، 1933 ، 3411 ، 1549 ، 4163

الحل 5-

$$\sqrt{4163} = 64,52 \quad , \quad \sqrt{1549} = 39,35 \quad , \quad \sqrt{3411} = 58,4 \quad , \quad \sqrt{1933} = 43,9 \quad , \quad \sqrt{937} = 30,61$$

منه الجدول التالي :

n	937	1933	3411	1549	4163
2	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	2
5	2	3	توقف	4	3
7	6	1		2	5
11	2	8		9	5
13	1	9		2	3
17	2	12		2	15
19	6	14		10	2
23	17	1		8	0
29	9	19		12	توقف
31		11		30	
37		9		32	
41		6			
43		41			

نتيجة :

الأعداد الأولية هي :

937 ، 1933 ، 1549

3411 ليس أولي لأنه مضاعف 3

4163 ليس أولي لأنه مضاعف 23

3705 ليس أولي لأنه مضاعف 5

التمرين 6-

n عدد طبيعي أصغر من 150 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الستة الأولى

هل العدد n أولي ؟

الحل 6-

$$\sqrt{150} = 12,2 \quad \text{إذن : } \sqrt{n} \leq 12,2$$

الأعداد الأولية الأصغر من 12 هي $\{2; 3; 5; 7; 11\}$

بما أن n لا يقبل القسمة على هذه الأعداد فإن n أولي .

التمرين 7-

برهن أن إذا كان n عدداً طبيعياً أولياً فإن (n+7) ليس أولي .

الحل 7-

n عدد طبيعي أولي إذن : إما ' n=2 أو n فردي كمايلي :

الحالة الأولى : n=2 إذن : n+7=9 منه (n+7) ليس أولي .

الحالة الثانية : n فردي إذن : n=2k+1 منه n+7=2k+1+7 حيث $k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{أي : } n+7=2(k+4)$$

منه : 2 يقسم (n+7)

إذن : (n+7) ليس أولي .

التمرين 8 -

n عدد طبيعي أولي أكبر تماماً من 3

1 - برهن أن n يكتب من الشكل $3k+1$ أو $3k-1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

2 - هل العكس صحيح ؟

الحل - 8

1 - n عدد طبيعي أولي و $n > 3$ إذن : n لا يقبل القسمة على 3

منه : إما $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

أي : إما $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

إذا كان $n = 3k+2$ فإن $n = 3k+2 - 3 + 3$

أي $n = 3(k+1) - 1$

أي $n = 3k' - 1$ حيث $k' = k+1$

خلاصة : إما $n = 3k+1$ أو $n = 3k-1$

2 - العكس ليس صحيح . مثال : $22 = 3(7) + 1$ لكن 22 ليس أولي .

$32 = 3(11) - 1$ لكن 32 ليس أولي .

التمرين 9 -

ليكن n عدد طبيعي أولي أكبر تماماً من 6

1 - برهن أن n يكتب على أحد الأشكال التالية : $n = 12k+1$ أو $n = 12k+5$

أو $n = 12k-5$ أو $n = 12k-1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2 - ليكن $p = n^2 + 11$. باستعمال البرهان بفصل الحالات عين باقي قسمة p على 24

الحل - 9

1 - n أولي إذن : n لا يقبل القسمة على 12 منه n يكتب على أحد الأشكال التالية :

$n = 12k+1$

$n = 12k+2$ أي $n = 2(6k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+3$ أي $n = 3(4k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+4$ أي $n = 4(3k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+5$

$n = 12k+6$ أي $n = 6(2k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+7$ أي $n = 12(k+1) - 5$ أي $n = 12k' - 5$ حيث $k' = k+1$

$n = 12k+8$ أي $n = 4(3k+2)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+9$ أي $n = 3(4k+3)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+10$ أي $n = 2(6k+5)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+11$ أي $n = 12(k+1) - 1$ أي $n = 12k' - 1$ حيث $k' = k+1$

نتيجة : n يكتب على أحد الأشكال التالية : $n = 12k+1$; $n = 12k+5$; $n = 12k-5$; $n = 12k-1$

حيث $k \in \mathbb{N}$

2 - لندرس الحالات الأربعة الممكنة للعدد الأولي n كمايلي :

الحالة الأولى : $n = 12k+1$ إذن : $n^2 = 144k^2 + 24k + 1$

منه : $p = n^2 + 11 = 144k^2 + 24k + 12$

$$144k^2 \equiv 0[24]$$

$$24k \equiv 0[24]$$

$$12 \equiv 12[24]$$

لدينا

$$144k^2 + 24k + 12 \equiv 12[24]$$

منه : $p \equiv 12[24]$

إذن : $p = 12[24]$

الحالة الثانية : $n = 12k+5$ منه $n^2 = 144k^2 + 120k + 25$

إذن : $p = 144k^2 + 120k + 36$

منه : $p \equiv 36[24]$

أي $p \equiv 12[24]$

الحالة الثالثة : $n = 12k-5$ منه $n^2 = 144k^2 - 120k + 25$

٢	٥	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	
٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠

$$p = 144k^2 - 120k + 36 : \text{ إذن } p \equiv 36[24] \text{ منه } p \equiv 12[24] \text{ أي } n^2 = 144k^2 - 24k + 1 : \text{ إذن } n = 12k - 1$$

$$p = 144k^2 - 24k + 12 : \text{ إذن } p \equiv 12[24]$$

$$p = 144k^2 - 24k + 12 : \text{ إذن } p \equiv 12[24]$$

$$n^2 = 144k^2 - 24k + 1 : \text{ إذن } n = 12k - 1$$

$$p = 144k^2 - 24k + 12 : \text{ إذن } p \equiv 12[24]$$

$$p = 144k^2 - 24k + 12 : \text{ إذن } p \equiv 12[24]$$

نتيجة : من أجل كل قيمة للعدد الأولي n فإن باقي قسمة p على 24 هو 12

التمرين - 10

n عدد طبيعي أولي أكبر تماماً من 3

1- برهن أن $8n-1$ يوافق 0 أو 1 بترديد 3

2- استنتج أن إذا كان العدد $8n-1$ أولي فإن العدد $8n+1$ ليس أولي .

الحل - 10

1- n عدد أولي إذن : لا يقبل القسمة على 3 منه $\left. \begin{array}{l} n \equiv 1[3] \text{ إما} \\ n \equiv 2[3] \text{ أو} \end{array} \right\}$

إذن : $\left. \begin{array}{l} 8n \equiv 8[3] \text{ إما} \\ 8n \equiv 16[3] \text{ أو} \end{array} \right\}$

أي : $\left. \begin{array}{l} 8n \equiv 2[3] \text{ إما} \\ 8n \equiv 1[3] \text{ أو} \end{array} \right\}$

منه $\left. \begin{array}{l} 8n-1 \equiv 1[3] \text{ إما} \\ 8n-1 \equiv 0[3] \text{ أو} \end{array} \right\}$

2- حسب السؤال (1) فإن إذا كان $8n-1$ أولي فإن $8n-1 \equiv 1[3]$ (لا يقبل القسمة على 3)

$$\text{منه } 8n-1+2 \equiv 1+2[3]$$

$$\text{أي } 8n+1 \equiv 0[3]$$

إذن : $8n+1$ ليس أولي لأنه يقبل القسمة على 3

التمرين - 11

ليكن p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 5

برهن أن إذا كان $p+2$ عدد أولي فإن $p+1$ يقبل القسمة على 6

الحل - 11

p أولي و $p \geq 5$ إذن : $\left. \begin{array}{l} p \text{ لا يقبل القسمة على } 2 \\ p \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \end{array} \right\}$

منه p لا يقبل القسمة على 6

أي $\left. \begin{array}{l} p = 6k+1 \text{ إما} \\ p = 6k+5 \text{ أو} \end{array} \right\}$

أي $\left. \begin{array}{l} p+2 = 6k+3 \text{ إما} \\ p+2 = 6k+7 \text{ أو} \end{array} \right\}$

أي $\left. \begin{array}{l} p+2 = 3(2k+1) \text{ إما} \\ p+2 = 6k'+1 \text{ حيث } k' = k+1 \end{array} \right\}$

نتيجة : إذا كان p أولي فإن $p+2 = 6k+1$ $\left. \begin{array}{l} p+2 = 6k+1 \text{ فإن } p+2 \text{ أولي} \\ p+1 = 6k \text{ إذن : } p+1 \text{ يقبل القسمة على } 6 \end{array} \right\}$

التمرين - 12

n عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 3

برهن أن n^2-1 يقبل القسمة على 8

الحل - 12

لندرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد n^2-1 على 8 كمايلي :

$n \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$n^2 - 1 \equiv ?[8]$	7	0	3	0	7	0	3	0

نتيجة : إذا كان n فردي فإن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8
بما أن n أولي و $n \geq 3$ فإن n فردي إذن : $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

التمرين - 13

n عدد طبيعي حيث $n \geq 5$

1 - برهن أن أحد من الأعداد التالية : $n+1$; $n+3$; $n+7$; $n+9$; $n+13$; $n+15$
يقبل القسمة على 5

2 - هل توجد قيم لـ n حتى تكون كل الأعداد المقترحة أولية ؟

الحل - 13

1 - n عدد طبيعي و $n \geq 5$ إذن :

$$\left. \begin{array}{l} \text{إما } n \equiv 0[5] \text{ منه } n+15 \equiv 0[5] \\ \text{أو } n \equiv 1[5] \text{ منه } n+9 \equiv 0[5] \\ \text{أو } n \equiv 2[5] \text{ منه } n+3 \equiv 0[5] \text{ و } n+13 \equiv 0[5] \\ \text{أو } n \equiv 3[5] \text{ منه } n+7 \equiv 0[5] \\ \text{أو } n \equiv 4[5] \text{ منه } n+1 \equiv 0[5] \end{array} \right\}$$

 2 - لا توجد أي قيمة لـ n تجعل كل الأعداد المقترحة أولية لأن من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي n
فإن أحد هذه الأعداد يقبل القسمة على 5 فإذن ليس أولي .

التمرين - 14

n عدد طبيعي . نضع $a = n^2 + 3n + 2$

هل توجد قيم للعدد الطبيعي r حتى يكون a أولي ؟

الحل - 14

لاحظ أن : $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

إذن : العدد a يقبل دائما تحليلًا من الشكل $a = (n+1)(n+2)$

منه : يكون a أولي إذا وفقط إذا كان

$$\left. \begin{array}{l} n+1=1 \text{ و } n+2 \text{ أولي} \\ \text{أو} \\ n+2=1 \text{ و } n+1 \text{ أولي} \end{array} \right\}$$

أي $\left. \begin{array}{l} n=0 \text{ و } 2 \text{ أولي} \\ \text{أو} \\ n=-1 \text{ و } 0 \text{ أولي مرفوض} \end{array} \right\}$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـ n تجعل العدد a أولي وهي $n=0$ منه $a=2$

التمرين - 15

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولي .

الحل - 15

ليكن n عدد طبيعي . $n^2 + 8n + 15 = (n+3)(n+5)$

بما أن $n+5 > 1$ و $n+3 > 1$ فإن العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولي لأنه

يقبل تحليل على الأقل من الشكل $(n+3)(n+5)$

التمرين - 16

n عدد طبيعي غير معدوم . نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

ليكن b عدد طبيعي حيث $2 \leq b \leq 2007$. نضع $a = 2007! + b$

1 - برهن أن العدد a ليس أولي .

2 - استنتج قائمة لـ 1006 عددا طبيعيا متتاليا ليس أوليا

الحل - 16

1 - $2007! = 1 \times 2 \times \dots \times b \times \dots \times 2007$ لأن $2 \leq b \leq 2007$

إذن : $\left. \begin{array}{l} b \text{ يقسم } 2007! \\ \text{بما أن } a = 2007! + b \\ \text{أي } b \text{ يقسم } a \\ \text{منه } a \text{ ليس أولي} \end{array} \right\}$

2- من أجل القيم 2 ، 3 ، 4 ، 2007 للعدد b نحصل على القائمة التالية :
 $2007! + 2$ ، $2007! + 3$ ، $2007! + 4$ ، $2007! + 2007$ وهي قائمة من 2006 عدد طبيعي متتابع ليس أولي .

التمرين 17

- 1- تحقق أن العدد 173 أولي .
- 2- عين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 173$
- 3- p عدد طبيعي أولي فردي . عين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = p$

الحل 17

$$\sqrt{173} = 13,1 \quad 1 -$$

n	2	3	5	7	11	13
$173 \equiv ?[n]$	1	2	3	5	8	4

نتيجة : 173 لا يقبل أي قاسم أولي أصغر من 13 إذن : عدد أولي

$$x^2 - y^2 = 173 \quad \text{يكافئ} \quad (x - y)(x + y) = 173 \quad 2 -$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 173 \end{array} \right\} \text{يكافئ:} \quad \text{لأن التحليل الوحيد الممكن للعدد } 173 \text{ هو } 1 \times 173 \text{ و } x - y < x + y$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 174 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \text{يكافئ:}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 87 \\ y = 86 \end{array} \right\} \text{يكافئ:}$$

3- p أولي إذن : التحليل الوحيد الممكن للعدد p هو $p = 1 \times p$

$$x^2 - y^2 = p \quad \text{تتافئ} \quad (x - y)(x + y) = p$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = p \end{array} \right\} \text{تتافئ:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = p + 1 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \text{تكافئ:}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{p+1}{2} \\ y = \frac{p+1}{2} - 1 \end{array} \right\} \text{تتافئ:} \quad (p \text{ فردي إذن } p+1 \text{ زوجي})$$

إذن : الثنائية الوحيدة التي تحقق $x^2 - y^2 = p$ هي $(\frac{p+1}{2}; \frac{p+1}{2} - 1)$
 حذار ! نبحث عن الأعداد x و y في \mathbb{N} فقط .

التمرين 18

b عدد طبيعي

$$1 - \text{أنشر الجداء } (b^2 - b + 1)(b^2 + b + 1)$$

2- ليكن a عدد صحيح . هل يمكن أن يكون العدد $a^4 + a^2 + 1$ أولي ؟

الحل 18

$$1 - (b^2 - b + 1)(b^2 + b + 1) = b^4 + b^3 + b^2 - b^3 - b^2 - b + b^2 + b + 1 = b^4 + b^2 + 1$$

2- حسب السؤال (1) فإن العدد $a^4 + a^2 + 1$ يحلل إلى $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$
 إذن : يكون $a^4 + a^2 + 1$ أولي في إحدى الحالتين التاليتين فقط :

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - a + 1 = 1 \\ a^2 + a + 1 \text{ أولي} \end{array} \right\} \text{الحالة الأولى:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - a = 0 \\ a^2 + a + 1 \text{ أولي} \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \text{ أو } a = 0 \\ a^2 + a + 1 \text{ أولي} \end{array} \right\} \text{أي}$$

أى

1. $a \cdot 1$ و $(1 + 1 + 1)$ اولی (محقق)

الحالة الثانية : $\left. \begin{array}{l} a^2 + a + 1 \approx 1 \\ a^2 - a + 1 \approx 1 \end{array} \right\}$ أولى

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + a = 0 \\ a^2 - a + i \end{array} \right\} \text{أولى أي}$$
$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \text{ أو } a = 0 \\ a^2 - a + 1 \end{array} \right\} \text{اي}$$
$$\left. \begin{array}{l} a=0 \text{ و } 1 \text{ اولی مرفوض} \\ \text{أو} \end{array} \right\}$$

$a = -1$ و $(1 + 1 + 1)$ أولي (محقق)

نتيجة : يكون العدد $a^4 + a^2 + 1$ أوليا إذا و فقط إذا كان $a = 1$ أو $a = -1$

التحريين - 19

عين كل القواسم الموجبة للأعداد التالية :

121	1980	400	360
-----	------	-----	-----

الحل - 19

121	11
11	11
1	

1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

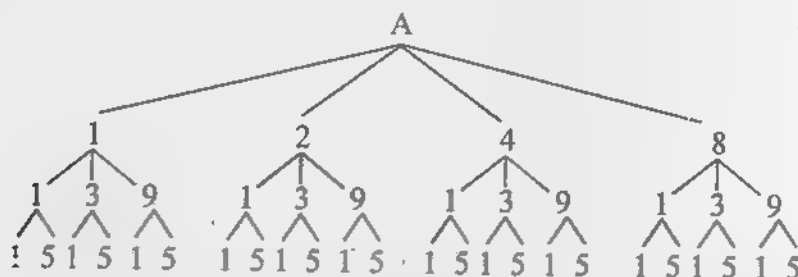
منه : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ إذن : عدد قواسم 360 هو $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$

400 = 2⁴ × 5² این : عدد قواسم 400 هو (4 + 1)(2 + 1) = 15

1980 = $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ این : عدد قواسم 1980 هو $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$

$121 = 11^2$ إذن : عدد قواسم 121 هو $(2 + 1) = 3$

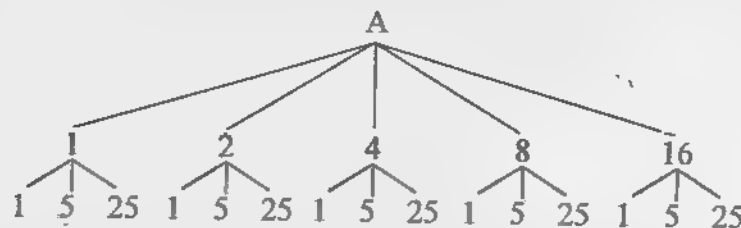
تعیین قواسم 360



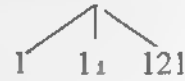
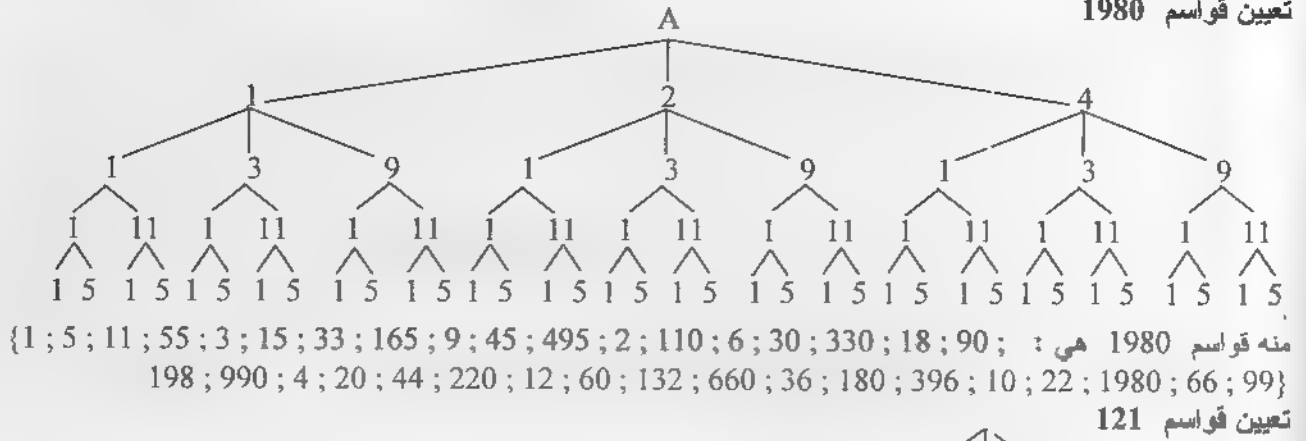
منه قواسم 360 هي : $\{1; 5; 3; 15; 9; 45; 2; 10; 6; 30; 18; 90; 4; 20; 12; 60; 36; 180; 8; 40; 24; 120; 72; 360\}$

ملاحظة : للحصول على القواسم نقوم بالصعود من أوراق الشجرة المرسومة إلى الجذر A و نذكر بإجراء عملية الجداء

تَعْيِينَ قَوَاسِمِ 400



منه قواسم 400 هي : $\{1; 5; 25; 2; 10; 4; 50; 20; 100; 8; 40; 200; 16; 80; 400\}$



إذن : قواسم 121 هي {1 ; 11 ; 121}

التمرين 20

ليكن العددين : $a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11$ و $b = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$.
برر أن العدد a يقبل القسمة على b ثم عين حاصل هذه القسمة .

الحل 20

كل العوامل الأولية التي تظهر في تحليل b تظهر أيضا في تحليل a و أسس كل هذه العوامل أكبر منها في تحليل a عن تحليل b إذن : العدد a يقبل القسمة على العدد b و حاصل هذه القسمة هو كمايلي :

$$a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11 (2 \times 3^3 \times 7 \times 5)$$

$$= b \times (2 \times 3^3 \times 7 \times 5)$$

إذن : $a/b = 2 \times 3^3 \times 7 \times 5$

التمرين 21

ما هي قواسم مربع عدد طبيعي أولي .

الحل 21

ليكن n عدد طبيعي أولي .

إذن : n^2 يقبل ثلاث قواسم هي {1 ; n ; n^2 }

التمرين 22

1 - حل العدد 625 إلى جداء عوامل أولية . ثم إستنتج كل قواسمه الموجبة .
2 - عين كل الثنائيات (x ; y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 625$

الحل 22

625	5	- 1
125	5	
25	5	
5	5	
1		

إذن : قواسم 625 هي {1 ; 5 ; 25 ; 125 ; 625}

2 - $x^2 - y^2 = 625$ تكافئ $(x - y)(x + y) = 625$

$x + y = 625$ و $x - y = 1$	}	تكافئ
أو $x + y = 125$ و $x - y = 5$		
$y = x - 1$ و $2x = 626$	}	تكافئ
أو $y = x - 1$ و $2x = 130$		
$y = 312$ و $x = 313$	}	تكافئ
أو $y = 64$ و $x = 65$		

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(65 ; 60) ; (313 ; 312)\}$

ملاحظة : لا يمكن للعدد $x - y$ أن يكون أكبر من العدد $x + y$ لأن x و y عددين طبيعيين
لذلك إما $x - y = 1$ أو $x - y = 5$

التمرين 23

- 1 - حل العدد 725 إلى جداء عوامل أولية .
- 2 - عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 725$

الحل 23

$$\begin{array}{r|l} 725 & 5 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$x^2 - y^2 = 725 \quad \text{تكافئ} \quad (x - y)(x + y) = 725 \quad \text{2 -}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 725 \text{ و } x - y = 1 \\ \text{أو} \\ x + y = 145 \text{ و } x - y = 5 \\ \text{أو} \\ x + y = 29 \text{ و } x - y = 25 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \text{ و } 2x = 726 \\ \text{أو} \\ y = x - 5 \text{ و } 2x = 150 \\ \text{أو} \\ y = x - 25 \text{ و } 2x = 54 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 362 \text{ و } x = 363 \\ \text{أو} \\ y = 70 \text{ و } x = 75 \\ \text{أو} \\ y = 2 \text{ و } x = 27 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

نتيجة : الثنائيات هي $\{(363 ; 362) ; (75 ; 70) ; (27 ; 2)\}$

التمرين 24

ليكن a عدد طبيعي . برهن أن إذا كان 2 قاسما للعدد a^2 فإن 2 يقسم العدد a

الحل 24

لدينا : $a^2 = a \times a$
إذن : إذا كان 2 يقسم a^2 فإن إما 2 يقسم a أو 2 يقسم a (لأن 2 أولي)
أي : 2 يقسم a

التمرين 25

p عدد طبيعي أولي و a عدد طبيعي .
برهن أن إذا كان p يقسم a^2 فإن p يقسم a

الحل 25

p يقسم a^2 إذن p يقسم $a \times a$
إذن : p يقسم a أو p يقسم a (لأن p أولي)
منه p يقسم a

التمرين 26

- 1 - كيف يمكن معرفة أن عددا طبيعيا N هو مربع تام من خلال تحليله إلى جداء عوامل أولية ؟
- 2 - عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n حتى يكون العدد n 240 مربعا تاما .
- 3 - أوجد عددا طبيعيا مكونا من أربعة أرقام حيث رقمه الأخير (رقم الآلاف) 9 و هو مربع تام و يقبل القسمة على 147

الحل - 26

1 - يكون عدد طبيعي N مربع تام إذا و فقط إذا كانت كل الأسس الظاهرة في تحليله إلى عوامل أولية هي أعداد زوجية .
 $240n = 2^4 \times 3 \times 5 \times n$ — 2

إذن : يكفي أن يكون $n = 3 \times 5$ حتى يكون $240n$ مربع تاما
 منه $n = 15$

3 - ليكن N العدد المطلوب .

لدينا : $147 = 3 \times 7^2$

$N \equiv 0[147]$ إذن : $N = 147n$

أي : $N = 3 \times 7^2 \times n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

لكن N مربع تام إذن $n = 3k^2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

منه : $N = 3 \times 3 \times 7^2 \times k^2$

أي $N = (3 \times 7 \times k)^2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

لدينا $\sqrt{9000} \approx 94,3$ و $\sqrt{9999} \approx 98,9$

إذن : يكفي أن نأخذ $94 < 3 \times 7 \times k < 98$

أي $94 < 21k < 98$ منه $\frac{94}{21} < k < \frac{98}{21}$ أي $4,4 < k < 4,6$

منه : لا يوجد أي قيمة لـ k تجعل $94 < 21k < 98$

نتيجة : لا يوجد أي عدد طبيعي N مكون من 4 أرقام حيث رقمه الأخير الألف هو 9 و N يقبل القسمة على 147

التمرين - 27

1 - حل العدد $a = 4312$ إلى جداء عوامل أولية .

2 - عين أصغر عدد طبيعي n حيث an يكون مربع تام

3 - عين أصغر عدد طبيعي p حيث ap يكون مضاعف للعدد 1000

الحل - 27

1 -

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

إذن : $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

2 - أصغر عدد طبيعي n حيث an مربع تام هو $n = 2 \times 11 = 22$

3 - نحل العدد 1000 كمايلي :

إذن : $1000 = 2^3 \times 5^3$

إذن : أصغر عدد طبيعي p حتى يكون ap مضاعف 1000 هو $p = 5^3 = 125$

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

التمرين - 28

1 - حل العدد 4032 إلى جداء عوامل أولية .

2 - عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $n(n+1) = 4032$

الحل - 28

1 -

4032	2
2016	2
1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$4032 = 2^6 \times 3^2 \times 7$

2 — إذا وجد عدد طبيعي n حيث $4032 = n(n+1)$ فإن كل من n و $n+1$ هما قاسمين للعدد 4032 إذن : يكفي أن نبحث عن قواسم العدد 4032 ثم البحث عن قاسمين متتاليين (n و $n+1$) وهما 2^6 و $3^2 \times 7$ أي 64 و 63 منه : $n = 63$ أي : $63 \times 64 = 4032$

طريقة أخرى : نحل في N المعادلة $n(n+1) = 4032$

$$n^2 + n - 4032 = 0 \text{ أي}$$

$$\Delta = 1 + 16128 = 16129 = (127)^2$$

$$\text{إذن : إما } n = \frac{-1 - 127}{2} = -64 \text{ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى } N$$

$$\text{أو } n = \frac{-1 + 127}{2} = 63 \text{ مقبول}$$

نتيجة : $n = 63$

التمرين 29

1 — عين $\text{ppcm}(230 ; 128)$

2 — عين $\text{ppcm}(-15 ; 18)$

الحل 29

$$\begin{array}{r|l} 230 & 2 \\ 115 & 5 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

— 1

$$230 = 2 \times 5 \times 23$$

$$128 = 2^7$$

نتيجة : $\text{ppcm}(128 ; 230) = 2^7 \times 5 \times 23$

2 — $\text{ppcm}(-15 ; 18) = \text{ppcm}(15 ; 18)$

$$18 = 2 \times 3^2, \quad 15 = 3 \times 5$$

إذن : $\text{ppcm}(15 ; 18) = 3^2 \times 2 \times 5 = 90$

نتيجة : $\text{ppcm}(-15 ; 18) = 90$

التمرين 30

عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $\text{ppcm}(18 ; a) = 630$

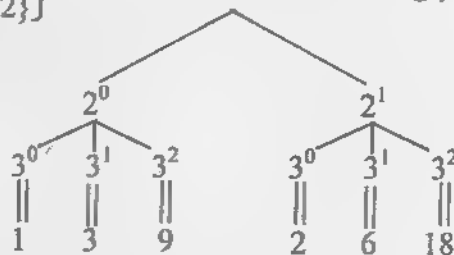
الحل 30

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{إذن : } 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

حيث $a = 2^n \times 3^p \times 5 \times 7$: إذن $\text{ppcm}(a ; 18) = 630$ حيث $\left. \begin{array}{l} n \in \{0 ; 1\} \\ p \in \{0 ; 1 ; 2\} \end{array} \right\}$



نتيجة : $a \in \{35 ; 35 \times 3 ; 35 \times 9 ; 35 \times 2 ; 35 \times 6 ; 18 \times 35\}$

التمرين 31

n عدد طبيعي . يوافق 3 بترديد 28 و بترديد 35

- 1- برهن أن $n-3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28
2- ما هي أصغر قيمة للعدد n

الحل - 31

$$1- \left. \begin{array}{l} n-3 \equiv 0[35] \\ n-3 \equiv 0[28] \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} n \equiv 3[35] \\ n \equiv 3[28] \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 35 \text{ مضاعف لـ } n-3 \\ 28 \text{ مضاعف لـ } n-3 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

إذن : $n-3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28

- 2- يكون n أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $n-3$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 35 و 28

$$\text{لدينا : } \left. \begin{array}{l} 35 = 7 \times 5 \\ 28 = 7 \times 4 \end{array} \right\} \text{ إذن : } \text{ppcm}(35; 28) = 7 \times 5 \times 4 = 140$$

$$n-3 = 140 \text{ منه : } 28 = 7 \times 4$$

$$\text{إذن : } n = 143$$

التمرين - 32

- عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n حيث باقي قسمة n على كل من العددين 52 و 64 هو 7

الحل - 32

$$\left. \begin{array}{l} n-7 \equiv 0[52] \\ n-7 \equiv 0[64] \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} n \equiv 7[52] \\ n \equiv 7[64] \end{array} \right\}$$

إذن : $(n-7)$ مضاعف مشترك للعددين 52 و 64

نتيجة : يكون n أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $\text{ppcm}(52; 64) = n-7$

$$\left. \begin{array}{l} 52 = 2^2 \times 13 \\ 64 = 2^6 \end{array} \right\} \text{ لدينا :}$$

$$\text{إذن : } \text{ppcm}(52; 64) = 2^6 \times 13 = 832$$

$$\text{منه : } n-7 = 832$$

$$\text{أي : } n = 839$$

التمرين - 33

- n عدد طبيعي غير معدوم . أكتب $\text{ppcm}(n; 2n+1)$

الحل - 33

$$1 = 2(n+1) - (2n+1) \text{ إذن : توجد ثنائية من الأعداد الصحيحة } (\alpha; \beta) = (1; -2)$$

$$\text{تحقق } \alpha(2n+1) + \beta n = 1$$

منه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين n و $2n+1$ أوليان فيما بينهما .

$$\text{نتيجة : } \text{ppcm}(n; 2n+1) = n(2n+1)$$

التمرين - 34

- n عدد طبيعي غير معدوم . أكتب $\text{ppcm}(2n+2; 4n+2)$

الحل - 34

$$\text{ppcm}(2n+2; 4n+2) = 2 \times \text{ppcm}(n+1; 2n+1)$$

$$\text{لكن } 2n+1 \text{ و } n+1 \text{ أوليان فيما بينهما لأن } 1 = 2(n+1) - (2n+1)$$

$$\text{منه : } \text{ppcm}(n+1; 2n+1) = (n+1)(2n+1)$$

$$\text{نتيجة : } \text{ppcm}(2n+2; 4n+2) = 2(n+1)(2n+1)$$

التمرين - 35

- n عدد طبيعي غير معدوم

$$\text{نضع } a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1) \text{ و } b = (3^n + 1)(7^n + 1)$$

$$\text{عين } \text{ppcm}(a; b)$$

الحل - 35

$$a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1) = (3^n - 1)(3^n + 1)(7^n - 1)(7^n + 1)$$

$$\text{إذن : } a = b \times (3^n - 1)(7^n - 1)$$

$$\text{أي : } a \text{ مضاعف لـ } b$$

$$\text{ppcm}(a; b) = a : \text{إذن}$$

التمرين 36

n عدد طبيعي أكبر تماماً من 3

$$b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6) \quad ; \quad a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$$

$$\text{برهن أن : } \text{ppcm}(a; b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) \times \text{ppcm}(6; 3)$$

الحل 36

$$a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$$

$$3n^2 + 3n - 18 = 3(n - 2)(n + 3)$$

$$n^2 - n - 6 = (n + 2)(n - 3)$$

$$b = 3(n - 2)(n + 3)(n + 2)(n - 3) : \text{إذن}$$

$$b = 3(n^2 - 4)(n^2 - 9) \quad \text{أي}$$

$$\text{ppcm}(a; b) = \text{ppcm}(6(n^2 - 4)(n^2 - 9); 3(n^2 - 4)(n^2 - 9)) : \text{منه}$$

$$= (n^2 - 4)(n^2 - 9) \times \text{ppcm}(6; 3)$$

التمرين 37

d هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين a و b

ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعديدين a^2 و ab

الحل 37

$$\text{ppcm}(a^2; ab) = a \times \text{ppcm}(a; b)$$

$$= a \left(\frac{ab}{d} \right) = \frac{a^2 b}{d}$$

التمرين 38

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 60 \\ \text{ppcm}(a; b) = 40 \end{array} \right\} \text{عين كل الثنائيات } (a; b) \text{ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة}$$

الحل 38

$$40 = 2^3 \times 5 : \text{لنبحث عن قواسم}$$

$$\text{إذن : قواسم } 40 \text{ هي } \{1; 5; 2; 10; 4; 20; 8; 40\}$$

$$\text{منه : } a \text{ و } b \text{ ينتميان إلى المجموعة } \{1; 5; 2; 10; 4; 20; 8; 40\}$$

$$\text{إذن : إما } (a = 20 \text{ و } b = 40) \text{ أو } (a = 40 \text{ و } b = 20)$$

$$\text{نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي } \{(20; 40); (40; 20)\}$$

التمرين 39

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق العلاقة :

$$\text{ppcm}(a; b) = 21 \times \text{pgcd}(a; b)$$

الحل 39

$$\alpha = \text{pgcd}(a; b) \text{ ليكن}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \alpha x \\ b = \alpha y \end{array} \right\} \text{نضع حيث } \text{pgcd}(x; y) = 1$$

$$\text{إذن : } \text{ppcm}(a; b) = \text{ppcm}(\alpha x; \alpha y)$$

$$= \alpha \times \text{ppcm}(x; y)$$

$$= \alpha \times y : \text{لأن } x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

$$\text{نتيجة : يكون } \text{ppcm}(a; b) = 21 \times \text{pgcd}(a; b) \text{ إذا و فقط إذا كان } x y = 21 \text{ و } \text{pgcd}(x; y) = 1$$

$$(x; y) \in \{(1; 21); (21; 1); (3; 7); (7; 3)\} \text{ منه}$$

$$(a; b) \in \{(\alpha; 21\alpha); (21\alpha; \alpha); (3\alpha; 7\alpha); (7\alpha; 3\alpha)\} \text{ أي}$$

التمرين 40

$$\text{عين كل الثنائيات } (a; b) \text{ من الأعداد الطبيعية التي تحقق } \text{ppcm}(a; b) - \text{pgcd}(a; b) = 187$$

الحل 40

$$\left. \begin{array}{l} a = x \times \text{pgcd}(a; b) \\ b = y \times \text{pgcd}(a; b) \end{array} \right\} \text{ليكن : إذن } x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما}$$

$$\text{أي } \text{ppcm}(x; y) = x y$$

$$\text{ppcm}(a; b) - \text{pgcd}(a; b) = 187 \text{ يكافئ } x y \times \text{pgcd}(a; b) - \text{pgcd}(a; b) = 187$$

إذن : $\text{pgcd}(a; b) \mid xy - 1$ 187

منه : $\text{pgcd}(a; b)$ قاسم للعدد 187

أي : $\text{pgcd}(a; b) \in \{1; 11; 17; 187\}$

إذن : نميز الحالات التالية :

أولا : $\text{pgcd}(a; b) = 1$ إذن : $xy - 1 = 187$

منه : $xy = 188$

لدينا : $188 = 2^3 \times 47$

إذن : $(x; y) \in \{(1; 188); (4; 47); (188; 1); (47; 4)\}$

منه : $(a; b) \in \{(1; 188); (4; 47); (188; 1); (47; 4)\}$

ثانيا : $\text{pgcd}(a; b) = 11$ إذن : $xy - 1 = 17$

منه : $xy = 18$

لدينا : $18 = 2 \times 3^2$

إذن : $(x; y) \in \{(1; 18); (2; 9); (9; 2); (18; 1)\}$

منه : $(a; b) \in \{(11; 198); (22; 99); (99; 22); (198; 11)\}$

ثالثا : $\text{pgcd}(a; b) = 17$ إذن : $xy - 1 = 11$

منه : $xy = 12$

لدينا : $12 = 2^2 \times 3$

إذن : $(x; y) \in \{(1; 12); (4; 3); (3; 4); (12; 1)\}$

أي : $(a; b) \in \{(17; 204); (68; 51); (51; 68); (204; 17)\}$

رابعا : $\text{pgcd}(a; b) = 187$ إذن : $xy - 1 = 1$

منه : $xy = 2$

إذن : $(x; y) \in \{(1; 2); (2; 1)\}$

منه : $(a; b) \in \{(187; 374); (374; 187)\}$

خلاصة : الثنائيات المطلوبة هي : $(11; 198); (17; 204); (51; 68); (68; 51); (204; 17); (187; 374); (374; 187); (1; 188); (4; 47); (188; 1); (47; 4); (99; 22); (22; 99); (198; 11); (11; 198)$

التمرين 41

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\text{ppcm}(a; b) = \text{pgcd}(a; b)$

الحل - 41

ليكن $\text{pgcd}(a; b) = \alpha$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$ إذن : $\text{ppcm}(x; y) = xy$

منه : $\text{ppcm}(\alpha x; \alpha y) = \alpha$ يكافئ $\text{ppcm}(x; y) = \text{pgcd}(a; b)$

$\alpha \times \text{ppcm}(x; y) = \alpha$ يكافئ

$\alpha xy = \alpha$ يكافئ

$xy = 1$ يكافئ

$x = y = 1$ يكافئ

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(a; a)\}$ حيث $a \in \mathbb{N}^*$

التمرين 42

عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\text{ppcm}(a; b) + 11 \text{pgcd}(a; b) = 20$ (1)

الحل - 42

ليكن $\alpha = \text{pgcd}(a; b)$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$ إذن : $\text{ppcm}(a; b) = \text{ppcm}(\alpha x; \alpha y) = \alpha xy$

منه : الشرط (1) يكافئ $\alpha xy + 11\alpha = 20$

يكافئ $11\alpha - 20 - \alpha xy = 0$

بما أن $\alpha xy > 0$ فإن $0 \leq 20 - \alpha xy \leq 20$ إذن : $0 \leq 11\alpha \leq 20$

لكن $\alpha \neq 0$ إذن : $\alpha = 1$

$$\text{منه : } 20 - xy = 11$$

$$\text{أي : } xy = 9$$

$$(x; y) \in \{(1; 9); (9; 1)\}$$

منه

$$(a; b) \in \{(1; 9); (9; 1)\} \text{ أي : الثنائيات المطلوبة هي :}$$

التمرين 43عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط

$$a \geq b \text{ مع } (1) \dots \dots \text{ppcm}(a; b) - 9 \text{pgcd}(a; b) = 13$$

الحل 43

$$\alpha = \text{pgcd}(a; b) \text{ ليكن}$$

$$b = \alpha y \text{ و } a = \alpha x \text{ نضع}$$

$$\text{إذن : } \text{ppcm}(a; b) = \alpha xy \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما}$$

$$\text{منه الشرط (1) يكافئ } \alpha xy - 9\alpha = 13$$

$$\alpha(xy - 9) = 13 \text{ يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} xy - 9 = 13 \text{ و } \alpha = 1 \\ xy - 9 = 1 \text{ و } \alpha = 13 \end{array} \right\} \text{ يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} xy = 22 \text{ و } \alpha = 1 \\ xy = 10 \text{ و } \alpha = 13 \end{array} \right\} \text{ يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \in \{(1; 22); (2; 11); (11; 2); (22; 1)\} \text{ و } \alpha = 1 \\ (x; y) \in \{(1; 10); (2; 5); (5; 2); (10; 1)\} \text{ و } \alpha = 13 \end{array} \right\} \text{ يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (a; b) \in \{(1; 22); (2; 11); (11; 2); (22; 1)\} \\ (a; b) \in \{(13; 130); (26; 65); (65; 26); (130; 13)\} \end{array} \right\} \text{ يكافئ}$$

$$a \geq b \text{ يكافئ } (a; b) \in \{(11; 2); (22; 1); (65; 26); (130; 13)\}$$

التمرين 44عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط : $\text{pgcd}(a; b) = 7$ و $\text{ppcm}(a; b) = 84$ **الحل 44**

$$\text{ليكن } a = 7x \text{ و } b = 7y \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

$$\text{إذن : } \text{ppcm}(a; b) = 7xy$$

$$\text{نتيجة : } 7xy = 84 \text{ يكافئ } xy = 12$$

$$(x; y) \in \{(1; 12); (3; 4); (4; 3); (12; 1)\} \text{ يكافئ}$$

$$(a; b) \in \{(7; 84); (21; 28); (28; 21); (84; 7)\} \text{ منه الثنائيات المطلوبة هي :}$$

التمرين 45 n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6

$$\text{نضع } b = n - 5 \text{ ; } a = 3n + 2$$

$$1 - \text{أحسب } a - 3b$$

$$2 - \text{استنتج أن } \text{pgcd}(a; b) \in \{1; 17\}$$

$$3 - \text{عين قيم } n \text{ التي يكون من أجلها } \text{pgcd}(a; b) = 17 \text{ و } \text{ppcm}(a; b) \leq 150$$

الحل 45

$$1 - a - 3b = 3n + 2 - 3(n - 5) = 3n + 2 - 3n + 15 = 17$$

$$2 - \text{ليكن } \text{pgcd}(a; b) = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha | a \\ \alpha | 3b \end{array} \right\} \text{ منه : } \left. \begin{array}{l} \alpha | a \\ \alpha | b \end{array} \right\} \text{ إذن : } \alpha | 17 \text{ أي } \alpha | a - 3b$$

$$\text{نتيجة : } \text{pgcd}(a; b) \in \{1; 17\}$$

$$3 - \text{ليكن } \text{pgcd}(a; b) = 17$$

$$\text{نضع } a = 17x \text{ و } b = 17y \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

$$\text{إذن : } \text{ppcm}(a; b) = 17xy$$

لدينا $\text{ppcm}(a; b) < 150$ إذن : $17 \times y < 150$

منه : $xy \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

إذن : $(x; y) \in \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (1; 3); (3; 1); (1; 4); (4; 1); (1; 5); (5; 1); (1; 6); (6; 1); (2; 3); (3; 2); (1; 7); (7; 1); (1; 8); (8; 1)\}$

أي : $(a; b) \in \{(17; 17); (17; 34); (34; 17); (17; 51); (51; 17); (17; 68); (68; 17); (17; 85); (85; 17); (17; 102); (102; 17); (34; 51); (51; 34); (17; 119); (119; 17); (17; 136); (136; 17)\}$

لكن $a - 3b = 17$ أي $a = 3b + 17$

منه الثنائيات المطلوبة هي $\{(68; 17)\}$

أي $\left. \begin{array}{l} 3n + 2 = 68 \\ n - 5 = 17 \end{array} \right\}$ منه $\left. \begin{array}{l} 3n = 66 \\ n = 17 + 5 \end{array} \right\}$ أي $n = 22$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـ n تحقق الشرط المطلوب و هي $n = 22$

التمرين 46

n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل من الحالات التالية :

$$b = 2n + 1 \quad ; \quad a = n - 1$$

$$b = 3n + 5 \quad ; \quad a = 2n + 3$$

الحل 46

$$\left. \begin{array}{l} a = n \\ b = 2n + 1 \end{array} \right\} - 1$$

إذن : $b - 2a = 2n + 1 - 2n = 1$

منه : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

$$\left. \begin{array}{l} a = 2n + 3 \\ b = 3n + 5 \end{array} \right\} - 1$$

إذن : $2b - 3a = 2(3n + 5) - 3(2n + 3) = 6n + 10 - 6n - 9 = 1$

منه : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين 47

n عدد طبيعي .

$$1 - \text{أثبت أن } \text{pgcd}(11n + 3; 7n + 2) = 1$$

$$2 - \text{أثبت أن } \text{pgcd}(n; n^2 + 1) = 1$$

الحل 47

$$1 - \text{ليكن } \text{pgcd}(11n + 3; 7n + 2) = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha | 11n + 3 \\ \alpha | 7n + 2 \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} \alpha | 7(11n + 3) \\ \alpha | 11(7n + 2) \end{array} \right\}$$

$$\alpha | 11(7n + 2) - 7(11n + 3)$$

$$\alpha | 77n + 22 - 77n - 21$$

$$\alpha | 1$$

$$\alpha = 1$$

$$2 - \text{ليكن } \text{pgcd}(n; n^2 + 1) = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha | n^2 \\ \alpha | n^2 + 1 \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} \alpha | n \\ \alpha | n^2 + 1 \end{array} \right\}$$

$$\alpha | n^2 + 1 - n^2$$

$$\alpha | 1$$

$$\alpha = 1$$

التمرين 48

n عدد طبيعي غير معدوم .

باستعمال مبرهنة بيزو برهن أن العددين $a = 2n^2 + 4n + 1$ و $b = n + 2$ أوليان فيما بينهما .

الحل - 48

$$a - 2nb - 2n^2 + 4n + 1 - 2n(n+2) = 1$$

إذن : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين - 49

n عدد طبيعي غير معدوم

$$1 - \text{تحقق أن : } (n^3 + 1)^2 = n^2(n^4 + 2n) + 1$$

2 - استنتج أن العددين $n^3 + 1$ و $n^4 + 2n$ أوليان فيما بينهما .

الحل - 49

$$(n^3 + 1)^2 = n^6 + 2n^3 + 1 = n^2(n^4 + 2n) + 1 \quad - 1$$

$$(n^3 + 1)^2 = n^2(n^4 + 2n) + 1 \quad - 2 \text{ حسب السؤال (1) فإن :}$$

$$(n^3 + 1)(n^3 + 1) - n^2(n^4 + 2n) = 1 \quad \text{إذن :}$$

منه : حسب مبرهنة بيزو فإن العددين $n^3 + 1$ و $n^4 + 2n$ أوليان فيما بينهما لأن توجد ثنائية

$$\alpha(n^3 + 1) + \beta(n^4 + 2n) = 1 \quad (\alpha ; \beta) \text{ من الأعداد الصحيحة تحقق}$$

$$\text{و هي } (\alpha ; \beta) = (n^3 + 1 ; -n^2)$$

التمرين - 50

n عدد طبيعي غير معدوم .

$$1 - \text{حل العدد } n(2n+1) - 1$$

2 - أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $(n+1)$ و $n(2n+1)$

الحل - 50

$$n(2n+1) - 1 = 2n^2 + n - 1 \quad - 1$$

لنحل كثير الحدود p "متغير الحقيقي x حيث $p(x) = 2x^2 + x - 1$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$p(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) \quad \text{منه :}$$

$$2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1) \quad \text{أي :}$$

نتيجة : العدد $n(2n+1) - 1$ يحل إلى $(2n-1)(n+1)$

$$2 - \text{حسب السؤال (1) : } n(2n+1) - 1 = (2n-1)(n+1)$$

$$\text{منه : } n(2n+1) - (2n-1)(n+1) = 1$$

إذن : حسب بيزو فإن العددين $(n+1)$ و $n(2n+1)$ أوليان فيما بينهما

$$\text{منه : } \text{pgcd}(n(2n+1); n+1) = 1$$

التمرين - 51

باستعمال خوارزمية إقليدس عين ثنائية $(x; y)$ من Z^2 تحقق $12x + 35y = 1$

الحل - 51

$$\begin{array}{r|l} 12 & 11 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 12 \\ \hline 11 & 2 \end{array}$$

لنكتب البواقي المتتالية في خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$(1) \dots\dots 11 = 35 - 12(2)$$

$$(2) \dots\dots 1 = 12 - 11(1)$$

بتعويض (1) في (2) نحصل على :

$$1 = 12 - 35 + 12(2) \quad \text{أي :}$$

$$1 = 12(3) - 35 \quad \text{أي :}$$

منه : يكفي أخذ $x = 3$ و $y = -1$ حتى يكون $12x + 35y = 1$

$$\text{أي : } (x; y) = (3; -1)$$

التمرين - 52

باستعمال خوارزمية إقليدس عين ثنائية $(x; y)$ من Z^2 حيث : $257x + 45y = \text{pgcd}(257; 45)$

الحل - 52لنبحث عن $\text{pgcd}(257; 45)$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 13 \\ \hline 26 & 6 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 45 & 32 \\ \hline 32 & 13 \\ \hline 13 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 257 & 45 \\ \hline 225 & 32 \\ \hline 32 & 5 \end{array}$$

إذن : $\text{pgcd}(257; 45) = 1$

لنكتب النواقي المتسلسلة كمايلي :

(1) $1 = 13 - 6(2)$

(2) $6 = 32 - 13(2)$

(3) $13 = 45 - 32(1)$

(4) $32 = 257 - 45(5)$

نعوض (2) في (1) : $1 = 13 - 2[32 - 13(2)]$

أي : $1 = 13 - 32(2) + 13(4)$

(5) $1 = 13(5) - 32(2)$ أي :

نعوض (3) في (5) : $1 = 5[45 - 32(1)] - 32(2)$

أي : $1 = 45(5) - 32(5) - 32(2)$

(6) $1 = 45(5) - 32(7)$ أي :

نعوض (4) في (6) : $1 = 45(5) - 7[257 - 45(5)]$

أي : $1 = 45(5) - 257(7) + 45(35)$

أي : $1 = 257(-7) + 45(40)$

إذن : يكفي أخذ $(x; y) = (-7; 40)$ حيث $257x + 45y = 1$ تحقيق : $257 \times 7 = 1799$ و $45 \times 40 = 1800$

$$-7(257) + 45(40) = -1799 + 1800 = 1$$

التمرين - 531 - عين $\text{pgcd}(168; 20)$ 2 - هل المعادلة $168x + 20y = 6$ تقبل حلا في \mathbb{Z}^2 3 - هل المعادلة $168x + 20y = 4$ تقبل حلا في \mathbb{Z}^2 **الحل - 53**

$$\left. \begin{array}{l} 20 = 4 \times 5 \\ 168 = 4 \times 42 \end{array} \right\} - 1 \quad \text{إذن : } \text{pgcd}(168; 20) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \mid 20y \\ 4 \mid 168x \end{array} \right\} - 2 \quad \text{إذن : } \left. \begin{array}{l} 4 \mid 20 \\ 4 \mid 168 \end{array} \right\} \text{ لدينا}$$

منه : $4 \mid 168x + 20y$

أي $4 \mid 6$ تناقضإذن : لا يوجد أي ثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 تحقق $168x + 20y = 6$

3 - $168x + 20y = 4$: كافي : $42x + 5y = 1$

إذن : المعادلة تقبل حل في \mathbb{Z}^2 لأن العددين 5 و 42 أوليان فيما بينهمافإن حسب بيزو توجد ثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 تحقق $42x + 5y = 1$ **التمرين - 54**عين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $5a = 7b$ **الحل - 54**

$$5a = 7b \quad \text{إذن : } 7 \text{ يقسم } 5a$$

لكن 7 أولي مع 5 إذن : حسب غوص فإن 7 يقسم a

منه : $a = 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} 5(7k) - 7b \\ a - 7k \end{array} \right\} \text{يكافئ} \left. \begin{array}{l} 5a = 7b \\ a - 7k \end{array} \right\} \text{إذن}$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 5k \\ a - 7k \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(7k; 5k)\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 55

عين كل الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة $55x = 16y$

الحل 55

$55x = 16y$ إذن : 16 يقسم x (لأن 16 أولي مع 55)

منه : $x = 16k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $55(16k) = 16y$

منه $y = 55k$

نتيجة : حلول المعادلة $55x = 16y$ في \mathbb{Z}^2 هي الثنائيات $\{(16k; 55k)\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 56

عين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول للمعادلة $21(x - 3) = 12(y + 4) \dots\dots\dots (1)$

الحل 56

المعادلة (1) تكافئ : $7(x - 3) = 4(y + 4) \dots\dots\dots (2)$

إذن : 4 يقسم $(x - 3)$ لأن 4 أولي مع 7

منه $x - 3 = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots (\alpha)$

إذن المساواة (2) تصبح : $7(4k) = 4(y + 4)$

أي : $7k = y + 4$

منه : $y = 7k - 4$

من المساواة (α) نستنتج أن $x = 4k + 3$

نتيجة : حلول المعادلة (1) في \mathbb{Z}^2 هي الثنائيات $\{(4k + 3; 7k - 4)\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 57

1 - حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $3x - 13y = 1 \dots\dots\dots (1)$

2 - استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث $3x \equiv 1[13]$

الحل 57

1 - الثنائية $(-4; -1)$ هي حل خاص للمعادلة لأن $3(-4) - 13(-1) = -12 + 13 = 1$

إذن : المعادلة (1) تكافئ $3x - 13y = 3(-4) - 13(-1)$

تكافئ $3x - 3(-4) = 13y - 13(-1)$

تكافئ $3(x + 4) = 13(y + 1)$

منه : 13 يقسم $(x + 4)$ لأن 13 أولي مع 3

إذن : $x + 4 = 13k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

منه : $3(13k) = 13(y + 1)$

أي : $y + 1 = 3k$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} x + 4 = 13k \\ y + 1 = 3k \end{array} \right\}$ إذن : $\left. \begin{array}{l} x = 13k - 4 \\ y = 3k - 1 \end{array} \right\}$

منه حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $\{(13k - 4; 3k - 1)\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

2 - $3x \equiv 1[13]$ إذن : $3x = 13y + 1$ حيث $y \in \mathbb{Z}$

منه : $3x - 13y = 1$

إذن : x هو حل المعادلة (1)

منه : $x = 13k - 4$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تحقيق : $3x = 3(13k - 4) = 39k - 12$

إذن : $3x \equiv -12[13]$

أي $3x \equiv 1[13]$

التمرين 58

لتكن في Z^2 المعادلة $2045x - 64y = 1$ (1)

1 - عين $\text{pgcd}(2045; 64)$

2 - استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في Z^2

3 - أوجد حلا خاصا للمعادلة (1)

4 - عين كل حلول المعادلة (1) في Z^2

الحل - 58

$$\left. \begin{array}{l} 64 = 2^6 \\ \text{pgcd}(64; 2045) = 1 \end{array} \right\} \text{ إذن : } 2045 = 5 \times 409$$

2 - 64 و 2045 أوليان فيما بينهما إذن : حسب بيزو توجد ثنائية $(x; y)$ من Z^2 تحقق $2045x + 64y = 1$
إذن : المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

3 - لنبحث عن الحل الخاص باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 64 & 3 \\ 60 & 20 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 64 & 61 \\ 61 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2045 & 64 \\ 192 & 31 \\ \hline 125 & \\ 64 & \\ \hline 61 & \end{array}$$

$$(1) \dots\dots 1 = 61 - 3(20)$$

$$(2) \dots\dots 3 = 64 - 61(1)$$

$$(3) \dots\dots 61 = 2045 - 64(31)$$

$$1 = 61 - 20[64 - 61(1)] \quad \text{نعوض (2) في (1) :}$$

$$1 = 61 - 64(20) + 61(20) \quad \text{أي :}$$

$$(4) \dots\dots\dots 1 = 61(21) - 64(20) \quad \text{أي :}$$

$$1 = 21[2045 - 64(31)] - 64(20) \quad \text{نعوض (3) في (4) :}$$

$$1 = 2045(21) - 64(21 \times 31) - 64(20) \quad \text{أي :}$$

$$1 = 2045(21) - 64(21 \times 31 + 20) \quad \text{أي :}$$

$$1 = 2045(21) - 64(671) \quad \text{أي :}$$

$$\text{إذن : الحل الخاص هو } (x; y) = (21; 671)$$

4 - حل المعادلة (1) في Z^2

$$2045x - 64y = 2045(21) - 64(671) \quad \text{تكافئ } 2045x - 64y = 1$$

$$2045x - 2045(21) = 64y - 64(671) \quad \text{تكافئ}$$

$$2045(x - 21) = 64(y - 671) \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{إذن : } 64 \text{ يقسم } (x - 21) \text{ لأن } 64 \text{ و } 2045 \text{ أوليان فيما بينهما}$$

$$\text{منه } x - 21 = 64k \text{ حيث } k \in Z$$

$$\text{إذن : } 2045(64k) = 64(y - 671)$$

$$\text{أي } 2045k = y - 671$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 64k + 21 \\ y = 2045k + 671 \end{array} \right\} \text{ حيث } k \in Z \quad \left. \begin{array}{l} x - 21 = 64k \\ y - 671 = 2045k \end{array} \right\} \text{ نتيجة :}$$

إذن : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $(64k + 21; 2045k + 671)$ حيث $k \in Z$

التمرين - 59

نعتبر في Z^2 المعادلة : $11x - 5y = 14$ (1)

1 - تحقق أن الثنائية $(19; 39)$ حل للمعادلة (1) ثم استنتج كل حلولها

2 - بين أن توجد ثنائية وحيدة $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (1) حيث $0 < \alpha < 5$

الحل - 59

$$11(19) - 5(39) = 209 - 195 = 14 \quad \text{— 1}$$

إذن : فعلا الثنائية $(19; 39)$ حل للمعادلة (1)

$$\text{منه : المعادلة (1) تكفي } 11x - 5y = 11(19) - 5(39)$$

$$11x - 11(19) = 5y - 5(39) \quad \text{تكافئ}$$

$$11(x - 19) = 5(y - 39) \text{ تكافئ}$$

إذن : 5 يقسم $x - 19$ لأن 5 و 11 أوليان فيما بينهما

$$\text{أي } x - 19 = 5k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{منه : } 11(5k) - 5(y - 39)$$

$$\text{أي } y - 39 = 11k$$

$$\text{نتيجة : } \left. \begin{array}{l} x - 19 = 5k \\ y - 39 = 11k \end{array} \right\} \text{ منه } \left. \begin{array}{l} x = 5k + 19 \\ y = 11k + 39 \end{array} \right\} \text{ و هي حلول المعادلة (1) في } \mathbb{Z}^2$$

$$2 - \text{ ليكن } \left. \begin{array}{l} \alpha = 5k + 19 \\ \beta = 11k + 39 \end{array} \right\} \text{ حل للمعادلة (1)}$$

$$0 < \alpha < 5 \text{ يكافئ } 0 < 5k + 19 < 5$$

$$\text{يكافئ } -19 < 5k < -14$$

$$\text{يكافئ } -19/5 < k < -14/5$$

$$\text{يكافئ } -3,8 < k < -2,8$$

$$\text{يكافئ } k = -3 \text{ لأن } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 5(-3) + 19 = 4 \\ \beta = 11(-3) + 39 = 6 \end{array} \right\} \text{ منه}$$

نتيجة : الحل المطلوب هو $(\alpha; \beta) = (4; 6)$

التمرين 60

في المستوي المنسوب إلى معلم نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $21x - 31y - 2 = 0$

1 - تحقق أن النقطة $A(6; 4)$ تنتمي إلى (Δ)

2 - استنتج كل نقاط المستقيم (Δ) و التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

الحل 60

$$21(6) - 31(4) - 2 = 126 - 124 - 2 = 0 \quad -1$$

إذن : النقطة $A(6; 4)$ تنتمي إلى (Δ)

2 - تكون النقطة $N(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ حيث $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ نقطة من (Δ) إذا و فقط إذا كانت الثانية $(x; y)$

حلا للمعادلة $21x - 31y = 2$ في \mathbb{Z}^2

لدينا حسب السؤال (1) الثانية $(6; 4)$ حل خاص

$$\text{إذن : المعادلة تكافئ } 21x - 31y = 21(6) - 31(4)$$

$$\text{تكافئ } 21x - 21(6) = 31y - 31(4)$$

$$\text{تكافئ } 21(x - 6) = 31(y - 4)$$

إذن : 31 يقسم $x - 6$ لأن 31 و 21 أوليان فيما بينهما

$$\text{منه } x - 6 = 31k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن : } 21(31k) = 31(y - 4)$$

$$\text{منه : } y - 4 = 21k$$

$$\text{نتيجة : } \left. \begin{array}{l} x - 6 = 31k \\ y - 4 = 21k \end{array} \right\} \text{ منه } \left. \begin{array}{l} x = 31k + 6 \\ y = 21k + 4 \end{array} \right\}$$

إذن : النقاط المطلوبة هي $N(31k + 6; 21k + 4)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 61

n عدد طبيعي

برهن أن العدد $n(n^2 + 5)$ يقبل القسمة على 6

الحل 61

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$n^2 \equiv ?[6]$	0	1	4	3	4	1
$n^2 + 5 \equiv ?[6]$	5	0	3	2	3	0
$n(n^2 + 5) \equiv ?[6]$	0	0	0	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n^2 + 5)$ يقبل القسمة على 6

التمرين - 62

n عدد طبيعي أكبر تماماً من 2 . نضع $a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$

1 - أكتب a على شكل جداء خمسة أعداد طبيعية متتالية

2 - برهن أن العدد a يقبل القسمة على كل من 3 و 5

3 - برهن أن العدد a يقبل القسمة على 8

4 - استنتج أن العدد a يقبل القسمة على 120

الحل - 62

$$a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \quad - 1$$

$$= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$$

$$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$$

نضع $n - 2 = b$ إذن : $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$ و هو المطلوب

2 - حسب السؤال (1) فإن $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$ حيث $b \in \mathbb{N}^*$ لأن $n > 2$ أي $n - 2 > 0$

إذا كان $b \equiv 0[3]$ فإن $a \equiv 0[3]$

إذا كان $b \equiv 1[3]$ فإن $b + 2 \equiv 0[3]$ إذن : $a \equiv 0[3]$

إذا كان $b \equiv 2[3]$ فإن $b + 1 \equiv 0[3]$ إذن : $a \equiv 0[3]$

نتيجة : a يقبل دائماً القسمة على 3

إذا كان $b \equiv 0[5]$ فإن $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 1[5]$ فإن $b + 4 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 2[5]$ فإن $b + 3 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 3[5]$ فإن $b + 2 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 4[5]$ فإن $b + 1 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

نتيجة : a يقبل دائماً القسمة على 5

3 - لدينا : $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$

إذا كان b زوجي فإن $b + 2$ زوجي
و $b + 4$ زوجي

إذن : $b(b + 2)(b + 4)$ يقبل القسمة على 8

منه : a يقبل القسمة على 8

إذا كان b فردي فإن $b + 1$ زوجي
و $b + 3$ زوجي

منه : $b + 1 = 2k + 2$
 $b + 3 = 2k + 4$

إذن : $(b + 1)(b + 3) = (2k + 2)(2k + 4)$

أي : $(b + 1)(b + 3) = 2(k + 1) \times 2(k + 2)$

أي : $(b + 1)(b + 3) = 4(k + 1)(k + 2)$

بما أن $k + 1$ و $k + 2$ عددين طبيعيين متتابعين فإن أحدهما زوجي

منه : $(b + 1)(b + 3)$ مضاعف 8

إذن : a يقبل القسمة على 8

نتيجة : العدد a دائماً يقبل القسمة على 8

4 - a مضاعف 3
 a مضاعف 5
 a مضاعف 8
إذن : a مضاعف $3 \times 5 \times 8$ (لأن الأعداد 3 ، 5 و 8 أولية فيما بينها مثلي مثلي)
أي a مضاعف 120

التمرين - 63

عين باقي قسمة العددين 7^{10} و 7^{2521} على 11

الحل - 63

لندرس بواقي قسمة 7^n على 11

$$7^0 \equiv 1[11]$$

$$7^1 \equiv 7[11]$$

$$7^2 \equiv 5[11]$$

$$7^3 \equiv 2[11]$$

$$7^4 \equiv 3[11]$$

$$7^5 \equiv 10[11]$$

$$7^6 \equiv 4[11]$$

$$7^7 \equiv 6[11]$$

$$7^8 \equiv 9[11]$$

$$7^9 \equiv 8[11]$$

$$7^{10} \equiv 1[11]$$

نتيجة : باقي قسمة 7^{10} على 11 هو 1
 $7^{2521} = 7^{10(252)+1} = 7 \times (7^{10})^{252}$ إذن : $7^{2521} \equiv 7[11]$ لأن $(7^{10})^{252} \equiv 1[11]$
 أي باقي قسمة 7^{2521} على 11 هو 7

التمرين 64

1 - برهن أن العدد 331 أولي .

n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري على شكل 330 رقما كلها مساوية إلى 9

2 - أحسب $n + 1$

الحل - 64

$$\sqrt{331} = 18,1 - 1$$

n	2	3	5	7	11	13	17
$331 \equiv ?[n]$	1	1	1	2	1	6	8

نتيجة : 331 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية n حيث $n \leq \sqrt{331}$ إذن : 331 أولي .

$$n = 9 \times 10^{329} + 9 \times 10^{328} + \dots + 9 \times 10 + 9 \quad - 2$$

$$= 9[10^{329} + 10^{328} + \dots + 10 + 1]$$

$$= 9 \left[\frac{10^{330} - 1}{10 - 1} \right]$$

$$= 10^{330} - 1$$

نتيجة : $n + 1 = 10^{330} - 1 + 1 = 10^{330}$ أي $n + 1 = 10^{330}$

التمرين 65

n عدد طبيعي

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها : $n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv 0[3]$

الحل - 65

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$n^2 \equiv ?[3]$	0	1	1
$n^3 \equiv ?[3]$	0	1	2
$n^4 \equiv ?[3]$	0	1	1
$2n^2 \equiv ?[3]$	0	2	2
$2n \equiv ?[3]$	0	2	1
$n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv ?[3]$	1	1	1

نتيجة : لا توجد أي قيمة للعدد الطبيعي n حيث $n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv 0[3]$

التمرين 66

1 - برهن أن من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^3 \equiv x[3]$

2 - ما هي قيم العدد الصحيح x حيث $x^3 \equiv x[4]$

3 - استنتج قيم x حيث $x^3 \equiv x[12]$

الحل - 66

- 1

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$x^3 \equiv ?[3]$	0	1	2

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^3 \equiv x[3]$

- 2

$x \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$x^3 \equiv ?[4]$	0	1	0	3

إذن : $x^3 \equiv x[4]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$ - 3 $x^3 \equiv x[12]$ يكافئ $x^3 - x \equiv 0[12]$ يكافئ $\left. \begin{array}{l} x^3 - x \equiv 0[3] \\ x^3 - x \equiv 0[4] \end{array} \right\}$ (لأن 4 و 3 أوليان فيما بينهما)يكافئ $\left. \begin{array}{l} x^3 \equiv x[3] \\ x^3 \equiv x[4] \end{array} \right\}$ يكافئ $x^3 \equiv x[4]$ لأن الشرط $x^3 \equiv x[3]$ محقق دائما .يكافئ $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$

التمرين - 67

a عدد صحيح .

1 - ما هي البواقي الممكنة لقسمة a^4 على 52 - استنتج ان المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$ لا تقبل حلا في Z^2

الحل - 67

- 1

$a \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$a^4 \equiv ?[5]$	0	1	1	1	1

إذن : البواقي الممكنة لقسمة a^4 على 5 هي $\{0; 1\}$ 2 - إذا وجدت ثنائية $(x; y)$ من $Z \times Z$ حلا للمعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$ فإن : $x^4 + 781 \equiv 3y^4[5]$ أي : $x^4 + 1 \equiv 3y^4[5] \dots\dots\dots (1)$ الحالة الأولى : $\left. \begin{array}{l} x^4 \equiv 0[5] \\ y^4 \equiv 0[5] \end{array} \right\}$ إذن : (1) تكافئ $1 \equiv 0[5]$ تناقضالحالة الثانية : $\left. \begin{array}{l} x^4 \equiv 1[5] \\ y^4 \equiv 1[5] \end{array} \right\}$ إذن : (1) تكافئ $1 \equiv 3[5]$ تناقضالحالة الثالثة : $\left. \begin{array}{l} x^4 \equiv 2[5] \\ y^4 \equiv 0[5] \end{array} \right\}$ إذن : (1) تكافئ $2 \equiv 0[5]$ تناقضالحالة الرابعة : $\left. \begin{array}{l} x^4 \equiv 3[5] \\ y^4 \equiv 1[5] \end{array} \right\}$ إذن : (1) تكافئ $2 \equiv 3[5]$ تناقض

نتيجة : لا توجد أي ثنائية $(x; y)$ من Z^2 تحقق $x^4 + 781 = 3y^4$ و خاصة تحقق المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$
 ملاحظة : في كل التمارين الموالية نعتبر A مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من أو تساوي 27 و نرفق كل عنصر من A حرفا أبجديا كمايلي :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
21	22	23	24	25	26	27

التمرين - 68

نقوم بعملية تشفير الكلمات باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x + 3$ على 28

مثلا : لتشفير الحرف ق لدينا $x = 20$

إذن : y هو باقي قسمة $(20 + 3)$ على 28

منه : $y = 23$

أي تشفير الحرف ق هو م

1 - شفر الكلمة (الجزائر)

2 - حل تشفير الكلمات التالية : تبضل ؛ لنغوا نهصاصت ؛ وذوز

الحل - 68

- 1

	ر	ا	ا	ز	ج	ل	ا
x	9	0	0	10	4	22	0
$y = x + 3$	12	3	3	13	7	25	3
التشفير	ش	ث	ث	س	د	ه	ت

منه : تشفير كلمة الجزائر هو الكلمة : نهصاصت

2 - لحل تشفير كلمة لدينا : $[28] y = x + 3$ منه $[28] x = y - 3$ كما يلي :

ملاحظة : إذا كان x سالب نضيف له 28

لأن $28 \equiv 0[28]$

	ل	ض	ب	ت
y	22	14	1	2
$x = y - 3$	19	11	26	27
فك التشفير	ف	س	و	ي

منه : الكلمة تبضل هي تشفير الكلمة "يوسف"

	ل	ث	غ	و	ا	ث	ه	ص	ا	ش	ث	ث
y	22	3	18	26	0	3	25	13	0	12	3	3
$x = y - 3$	19	0	15	23	25	0	22	10	25	9	0	0
فك التشفير	ف	ا	ط	م	ه	ا	ل	ز	ه	ر	ا	ء

إذن : الكلمة لنغوا نهصاصت هو تشفير الكلمة فاطمة الزهراء

	و	ذ	و	ز
y	26	8	26	10
$x = y - 3$	23	5	23	7
فك التشفير	م	ح	م	د

إذن : الكلمة وذوز هي تشفير لكلمة محمد

التمرين - 69

نتكن f دالة للمجموعة A في نفسها ترفق كل عنصر x بباقي قسمة $14x + 3$ على 28

شفر الكلمة سكر . ما هو المشكل المطروح ؟

الحل - 69

$$14(11) + 3 = 157$$

$$14(21) + 3 = 297$$

$$14(9) + 3 = 129$$

	ر	ك	س
x	9	21	11
باقي قسمة $14x + 3$ على 28	17	17	17
التشفير	ع	ع	ع

نتيجة : كل من الحروف س ، ك ، ر لهم نفس التشفير .

إذن : لا يمكن إجراء عملية التشفير باستعمال الدالة f المعطاة لأنها ليست تقابل من A نحو A

أي يمكن أن يكون $a \neq b$ و لكن $f(a) = f(b)$

التمرين - 70

نعرف طريقة للتشفير وفقا للدالة f حيث $f(x)$ هو باقي قسمة $11x + 6$ على 28

1 - شفر كلمة "تلمسان"

2 - حل المعادلة $11x \equiv 1[28]$ (لاحظ أن $55 = 5 \times 11$)

3 - بين أن إذا كان $y = f(x)$ فإن $x \equiv 23y + 2[28]$

4 - بين أن كل حرفين مختلفين يحولان إلى حرفين مختلفين .

5 - حل تشفير الكلمتين : شخخا ، هغغب .

الحل - 70

1 -

	ت	ل	م	س	ا	ن
x	2	22	23	11	0	24
11x + 6	28	248	259	127	6	270
باقي قسمة 11x + 6 على 28	0	24	7	15	6	18
التشفير	ا	ن	د	ط	خ	غ

إذن : الكلمة تلمسان تشفر إلى كلمة أند طخغ

$$3 - 11x \equiv 1[28] \text{ إذن : } 5 \times 11x \equiv 5 \times 1[28] \quad 5 \times 11x \equiv 5[28]$$

$$55x \equiv 5[28] \text{ أي}$$

$$55 = 2(28) - 1 \text{ لأن } -x \equiv 5[28] \text{ أي}$$

$$x \equiv -5[28] \text{ منه}$$

$$x \equiv 23[28] \text{ أي}$$

$$\text{منه : } x = 28k + 23 \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{تحقيق : إذا كان } x = 28k + 23 \text{ فإن : } 11x = 11(28k + 23)$$

$$11x = 28(11k) + 253 \text{ أي}$$

$$11x \equiv 253[28] \text{ منه}$$

$$11x \equiv 1[28] \text{ أي : محقق .}$$

$$3 - y = f(x) \text{ إذن : } 11x + 6 \equiv y[28]$$

$$23(11x + 6) \equiv 23y[28] \text{ منه}$$

$$253x + 138 \equiv 23y[28] \text{ منه}$$

$$\left. \begin{array}{l} 253 \equiv 1[28] \\ 138 \equiv 26[28] \end{array} \right\} \text{ لأن } x + 26 \equiv 23y[28] \text{ منه}$$

$$x \equiv 23y - 26[28] \text{ منه}$$

$$-26 \equiv 2[28] \text{ لأن } x \equiv 23y + 2[28] \text{ منه}$$

$$4 - \text{ليكن } x, x', y, y' \text{ أربعة عناصر من المجموعة } A \text{ حيث } y' = y \text{ و } y' = f(x') \text{ و } y = f(x)$$

$$\text{إذن : } \left. \begin{array}{l} x' \equiv 23y' + 2[28] \\ x \equiv 23y + 2[28] \end{array} \right\}$$

$$x' - x \equiv 0[28] \text{ منه}$$

$$x' \equiv x[28] \text{ أي}$$

$$0 \leq x' \leq 27 \text{ لكن}$$

$$0 \leq x \leq 27$$

$$\text{إذن : } x' = x$$

نتيجة : كل عددين مختلفين x و x' لهما صورتين مختلفتين بالدالة f

إذن : كل حرفين مختلفين يحولان إلى حرفين مختلفين .

5 - حل تشفير كلمة شيكخا

	ش	ي	ك	خ	ا
y	12	27	21	6	0
23y + 2	278	623	485	140	2
باقي قسمة 23y + 2 على 28	26	7	9	0	2
فك التشفير	و	د	ر	ا	ت

إذن : الكلمة شيكخا هي تشفير لكلمة "ودرات"

	ب	ع	خ	ع	هـ
y	1	17	6	18	25
23 y + 2	25	393	140	416	575
باقي قسمة 23 y + 2 على 28	25	1	0	24	17
فك التشفير	هـ	ب	ا	ن	ع

نتيجة : الكلمة مضعوب هي تشفير لكلمة " عتابه "

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين 1

k عدد طبيعي . نضع $n = 2310k + 2100$

1 - برهن أن إذا غيرنا أحد أرقام العدد n دون تغيير رقم أحاده يكون دائما غير أولي

2 - برهن أن $n \equiv 0[11]$; $n + 1 \equiv 0[3]$; $n \equiv 0[5]$; $n \equiv 0[7]$

3 - استنتج أن n يكون غير أولي مهما غيرنا أي رقم من أرقامه

4 - هل توجد أعداد أخرى تحقق هذه الخاصية ؟

الحل 1

1 - من أجل كل عدد طبيعي k فإن رقم أحاد العدد 2310k هو 0

إذن : رقم أحاد العدد $n = 2310k + 2100$ هو 0 إذن n مضاعف 10

منه : مهما غيرنا أحد أرقام العدد n باستثناء رقم أحاده المعلوم فإن n يبقى مضاعف 10 إذن : n غير أولي

$$\left. \begin{array}{l} 2310 \equiv 0[11] \\ 2100 \equiv 10[11] \\ 1 \equiv 1[11] \end{array} \right\} - 2 \quad \begin{array}{l} \text{منه : } 2310k + 2100 + 1 \equiv 0 + 10 + 1[11] \\ \text{أي : } n + 1 \equiv 0[11] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2310 \equiv 0[3] \\ 2100 \equiv 0[3] \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{منه : } 2310k + 2100 \equiv 0[3] \\ \text{أي : } n \equiv 0[3] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2310 \equiv 0[5] \\ 2100 \equiv 0[5] \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{إذن : } 2310k + 2100 \equiv 0[5] \\ \text{أي : } n \equiv 0[5] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2310 \equiv 0[7] \\ 2100 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{إذن : } 2310k + 2100 \equiv 0[7] \\ \text{أي : } n \equiv 0[7] \end{array}$$

3 - لدينا رقم أحاد العدد n يساوي 0 منه إذا غيرنا رقم أحاده فإن العدد n يكون مساويا إلى أحد القيم التالية :

$$n + 1 : \text{ لكن } n + 1 \equiv 0[11]$$

$$n + 2 : \text{ لكن } n + 2 \text{ زوجي لأن } n \text{ زوجي}$$

$$n + 3 : \text{ لكن } n + 3 \text{ مضاعف 3 لأن } n \text{ مضاعف 3}$$

$$n + 4 : \text{ لكن } n + 4 \text{ زوجي لأن } n \text{ زوجي}$$

$$n + 5 : \text{ لكن } n + 5 \text{ مضاعف 5 لأن } n \equiv 0[5]$$

$$n + 6 : \text{ لكن } n + 6 \text{ زوجي لأن } n \text{ زوجي}$$

$$n + 7 : \text{ لكن } n + 7 \text{ مضاعف 7 لأن } n \equiv 0[7]$$

$$n + 8 : \text{ لكن } n + 8 \text{ زوجي لأن } n \text{ زوجي}$$

$$n + 9 : \text{ لكن } n + 9 \text{ مضاعف 3 لأن } n \equiv 0[3]$$

نتيجة : مهما غيرنا رقم أحاد العدد n فإن n يبقى ليس أولي .

إذن : مهما غيرنا أي رقم من أرقام العدد n فإن n ليس أولي .

4 - يكفي أن نضرب العدد r في قوة للعدد 10 حتى نحصل على أعداد طبيعية تحقق أن مهما غيرنا أحد أرقامها فإنها ليست أولية أي كل الأعداد الطبيعية التي تكتب من الشكل $n = 10^p(2310k + 2100)$ حيث $p \in \mathbb{N}$ تحقق هذه الخاصية

التمرين 2

1 - برهن أن كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر من أو يساوي 6 هو قاسم للعدد $(n-1)!$

حيث $(n-1)! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1)$

2 - هل هذه الخاصية صحيحة من أجل عدد أولي ؟

الحل 2

1 - ليكن n عدد غير أولي، حيث $n \geq 6$

إذن : n يقبل تحليل إلى جداء أعداد من الشكل $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p$

حيث $2 \leq a_i \leq n/2$ (هي قواسم العدد n)

منه : من أجل كل i فإن $2 \leq a_i < (n-1)$

إذن : $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p$ يقسم $2 \times 3 \times \dots \times (n-1)$

أي n يقسم $(n-1)!$

2 - إذا كان n أولي فإن الخاصية ليست صحيحة لأن العدد n لا يقسم أي عامل من العوامل التي تظهر في $(n-1)!$ فإن لا يمكن أن يقسم جذاؤها لأنه لا يقبل تحليل

التمرين 3

ليكن p عدد أولي أكبر تماماً من 3. نضع $n = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p$

برر أن الأعداد $n+2$; $n+3$; $n+4$; $n+p$ ليست أولية

الحل 3

$n+2 = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p + 2 = 2(3 \times 4 \times \dots \times p + 1)$ إذن : $n+2$ ليس أولي

$n+3 = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p + 3 = 3(2 \times 4 \times 5 \times \dots \times p + 1)$ إذن : $n+3$ ليس أولي

$n+4 = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p + 4 = 4(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p + 1)$ إذن : $n+4$ ليس أولي

$n+p = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p + p = p(2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (p-1) + 1)$ إذن : $n+p$ ليس أولي

التمرين 4

a و b عددين طبيعيين أوليين حيث $2 < a < b$

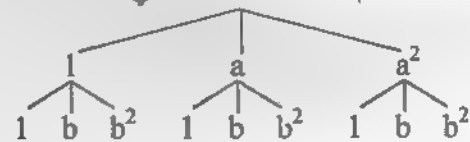
1 - عين كل الثنائيات $(x; y)$ من $Z^* \times Z^*$ التي تحقق $x^2 - y^2 = (ab)^2$

2 - عين هذه الثنائيات من أجل $(a; b) = (2; 7)$

الحل 4

1 - $x^2 - y^2 = (ab)^2$ يكفي $(x-y)(x+y) = a^2 b^2$

لنبحث عن قواسم العدد $a^2 b^2$ كمايلي :



إذن : القواسم هي $\{a^2 b^2; a^2 b; a^2; a b^2; a; a b; b^2; b; 1\}$

بما أن $x-y < x+y$ فإن نبحث عن تحليل لـ $a^2 b^2$ إلى جداء عاملين $\alpha \beta$ حيث $\alpha < \beta$

كمايلي : $a^2 \times b^2$; $a \times b^2 a$; $b \times a^2 b$; $1 \times a^2 b^2$

إذن : إما $\left. \begin{matrix} x-y=a^2 \\ x+y=b^2 \end{matrix} \right\}$ أو $\left. \begin{matrix} x-y=a \\ x+y=a b^2 \end{matrix} \right\}$ أو $\left. \begin{matrix} x-y=b \\ x+y=a^2 b \end{matrix} \right\}$ أو $\left. \begin{matrix} x-y=1 \\ x+y=a^2 b^2 \end{matrix} \right\}$ أي إما $\left. \begin{matrix} 2x=a^2+b^2 \\ y=x-a^2 \end{matrix} \right\}$ أو $\left. \begin{matrix} 2x=a+a b^2 \\ y=x-a \end{matrix} \right\}$ أو $\left. \begin{matrix} 2x=b+a^2 b \\ y=x-b \end{matrix} \right\}$ أو $\left. \begin{matrix} 2x=1+a^2 b^2 \\ y=x-1 \end{matrix} \right\}$

أي : $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{1+a^2 b^2}{2}; \frac{1+a^2 b^2}{2} - 1 \right); \left(\frac{b+a^2 b}{2}; \frac{b+a^2 b}{2} - b \right); \right.$

$\left. \left(\frac{a+a b^2}{2}; \frac{a+a b^2}{2} - a \right); \left(\frac{a^2+b^2}{2}; \frac{a^2+b^2}{2} - a^2 \right) \right\}$

2 - من أجل $(a; b) = (3; 7)$ فإن $(x; y) \in \{(221; 220); (35; 28); (75; 72); (29; 20)\}$ التمرين 5

1 - برهن أن كل مجموع 5 أعداد طبيعية فردية متتالية ليس أولي .

2 - في الحالة العامة ، من أجل $n \geq 2$ هل يمكن أن يكون مجموع n عدد طبيعي فردي متتابع أوليا ؟ الحل 5

1 - ليكن k عدد طبيعي . نضع $n = 2k + 1$ إذن n عدد طبيعي فردي .

منه : $S = n + (n + 2) + (n + 4) + (n + 6) + (n + 8)$ هو مجموع 5 أعداد فردية متتالية .

$$= 5n + 20$$

$$= 5(2k + 1) + 20$$

$$= 10k + 25$$

$$= 5(2k + 5)$$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي فردي n فإن 5 يقسم S

منه : مجموع 5 أعداد فردية متتالية هو دائما ليس أولي

2 - نضع $p = 2k + 1$ و $S = p + (p + 2) + (p + 4) + \dots + [p + 2(n - 1)]$

$$= np + [2 + 4 + 6 + \dots + 2(n - 1)]$$

$$= np + 2[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)]$$

$$= np + 2\left[\frac{1 + n - 1}{2}(n - 1)\right]$$

$$= np + n(n - 1)$$

$$= n[p + n - 1]$$

إذن : S يقبل تحليل من الشكل $n(p + n - 1)$

منه S ليس أولي .

نتيجة : مجموع n عدد طبيعي فردي متتابع لا يمكن أن يكون أولي ($n \geq 2$)

التمرين 6

نسمي أعداد Mersenne لأعداد الطبيعية الأولية التي تكتب من الشكل $N = 2^p - 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

a و b عدنان طبيعيان غير معدومان و يختلفان عن 1

1 - بسط المجموع $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$

2 - برهن أن إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإن $a = 2$

الحل 6

1 - $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ هو مجموع n حد متتابع لمتتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1

$$= 1 \times \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$S = \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad \text{إذن :}$$

2 - حسب السؤال (1) فإن $(a - 1)$ يقسم $a^n - 1$ لأن S عدد طبيعي .

لكن إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإنه لا يقبل قواسم ماعدا 1 و نفسه

إذن : $a - 1 = 1$ أي $a = 2$

التمرين 7

a و b عدنان طبيعيان . نضع $n = a^4 + 4b^4$

1 - برهن أن : $n = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

2 - برهن أن من أجل $b \geq 2$ فإن n لا يمكن أن يكون أولي

3 - من أجل $b = 1$ هل يمكن أن يكون n أولي ؟

4 - برهن أن العدد $1207^4 + 4^{1205}$ ليس أولي .

الحل 7

$$(a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = a^4 + 2a^2b^2 - 2a^3b + 2a^2b^2 + 4b^4 - 4ab^3 + 2a^2b + 4ab^3 - 4a^2b^2 - 1$$

$$= a^4 + 4b^4$$

$$= n$$

$$a^2 + 2b^2 - 2ab \cdot a^2 + b^2 - 2ab + b^2 \quad - 2$$

$$(a - b)^2 + b^2$$

$$\left. \begin{array}{l} b \geq 2 \\ (a - b)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ بما أن } \begin{array}{l} \text{فإن } (a - b)^2 + b^2 \geq 4 \\ \text{أي } a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 4 \\ \text{من جهة أخرى : } a^2 + 2b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab + b^2 \\ = (a + b)^2 + b^2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} b^2 \geq 4 \\ (a + b)^2 > 0 \end{array} \right\} \text{ بما أن } \begin{array}{l} \text{فإن } (a + b)^2 + b^2 > 4 \end{array}$$

$$\text{أي } a^2 + 2b^2 + 2ab > 4$$

نتيجة : إذا كان $b \geq 2$ فإن n يحلل إلى جداء عاملين كل منهما يختلف عن 1 إذن لا يمكن أن يكون n أولي .

$$3 - \text{ من أجل } b = 1 \text{ فإن : } n = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$$

$$= (a^2 + 2a + 2)[(a - 1)^2 + 1]$$

$$n = (1 + 2 + 2)(0 + 1) = 5 \quad \text{إذا كان } a = 1 \text{ فإن :}$$

إذن : n أولي

$$n = 2 \times 2 = 4 \quad \text{إذا كان } a = 0 \text{ فإن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} (a - 1)^2 + 1 > 1 \\ a^2 + 2a + 2 > 1 \end{array} \right\} \text{ إذا كان } a > 1 \text{ فإن : } n \text{ ليس أولي}$$

إذن : n يحلل إلى جداء عاملين كل منهما أكبر من 1
منه : لا يمكن لـ n أن يكون أولي . إلا من أجل $a = 1$

$$1207^4 + 4^{1205} = 1207^4 + 4 \times (4^{1204})$$

$$= 1207^4 + 4 \times (4^{301})^4$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1207 \\ b = 4^{301} \end{array} \right\} \text{ نضع } \begin{array}{l} \text{إذن حسب السؤال (1) فإن } a^4 + 4b^4 \text{ ليس أولي} \\ \text{أي } 1207^4 + 4^{1205} \text{ ليس أولي} \end{array}$$

التمرين 8

q عدد أولي عين المجموع S و الجداء P لكل القواسم الموجبة للعدد q^n حيث n عدد طبيعي غير معدوم

الحل 8

عدد القواسم الموجبة للعدد q^n هو $(n + 1)$ و هي : $\{1; q; q^2; q^3; \dots; q^n\}$

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{منه :}$$

$$P = 1 \times q \times q^2 \times \dots \times q^n = q^{1+2+\dots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين 9

ليكن p عدد أولي .

أثبت أن يكون p قاسما للعدد 1806 إذا و فقط إذا كان $p - 1$ قاسما للعدد 1806

الحل 9

لنبحث عن قواسم العدد 1806 :

$$\begin{array}{r|l} 1806 & 2 \\ 903 & 3 \\ 301 & 7 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$$

إذن : قواسم العدد 1806 هي حسب الجدول التالي :

1				2			
1		3		1		3	
1	7	1	7	1	7	1	7
1	43	1	43	1	43	1	43

$$\{1; 43; 7; 301; 3; 129; 21; 903; 2; 86; 14; 602; 6; 258; 42; 1806\}$$

منه القواسم الأولية للعدد 1806 هي $\{2; 3; 7; 43\}$

لاحظ أن الأعداد 42 ; 6 ; 2 ; 1 هي قواسم للعدد 1806 و هي ناتجة عن طرح 1 من القواسم الأولية .

إذن : إذا كان p أولي و p يقسم 1806 فإن $p-1$ يقسم 1806
هل : إذا كان $p-1$ يقسم 1806 و p أولي فإن p يقسم 1806 ؟
الجواب نعم لأن كل من الأعداد $\{3; 4; 6; 42\}$ تحقق هذه الشروط .
إذن : يكون p أولي قاسم لـ 1806 إذا و فقط إذا كان $p-1$ قاسم لـ 1806

التمرين - 10

a و b عدنان طبيعيان . نضع $n = 2^a \times 3^b$

- 1 - عين عدد القواسم الموجبة للعدد n
- 2 - عين n علما أن عدد قواسم العدد $2n$ هو ضعف عدد قواسم العدد n

الحل - 10

- 1 - $n = 2^a \times 3^b$ إذن : عدد قواسم n هو $(a+1)(b+1)$
- 2 - $2n = 2^{a+1} \times 3^b$ إذن : عدد قواسم $2n$ هو $(a+2)(b+1)$
يكون عدد قواسم $2n$ هو ضعف عدد قواسم n إذا و فقط إذا كان :
 $(a+2)(b+1) = 2(a+1)(b+1)$
 $a+2 = 2(a+1)$ أي :
 $a+2 = 2a+2$ أي :
أي : $a=0$ منه : $n = 3^b$ حيث $b \in \mathbb{N}$

التمرين - 11

ليكن $n = 200$

- 1 - عين مجموعة القواسم الموجبة للعدد n
- ليكن N عدد قواسم العدد n و p جداء كل هذه القواسم
- 2 - تحقق من صحة العلاقة : $n^N = p^2$ (1)
- ليكن $n = 2^a \times 5^b$ حيث a و b عدنان طبيعيان .
- 3 - أحسب الجداء p لكل قواسم العدد n
- 4 - هل العلاقة (1) محققة ؟
- 5 - عين العدد n من الشكل $2^a \times 5^b$ علما أن $p = 20^{42}$

الحل - 11

$$200 = 25 \times 8 = 5^2 \times 2^3 \quad \text{— 1}$$

منه قواسم 200 هي $\{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 25; 40; 50; 100; 200\}$

$$N = 12 \quad \text{(عدد قواسم 200)} \quad \text{— 2}$$

$$\begin{aligned} p &= 1 \times 5 \times 25 \times 2 \times 10 \times 50 \times 4 \times 20 \times 100 \times 8 \times 40 \times 200 \\ &= 5 \times 5^2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5^2 \times 2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5 \times 5^2 \times 2^2 \times 2^3 \times 5 \times 2^3 \times 5^2 \\ &= 2^{18} \times 5^{12} \end{aligned}$$

$$p^2 = 2^{36} \times 5^{24} \quad \text{إذن : } p = 2^{18} \times 5^{12}$$

$$n^N = 2^{36} \times 5^{24} \quad \text{إذن : } n^N = (2^3 \times 5^2)^{12}$$

نتيجة : العلاقة $n^N = p^2$ محققة .

$$\begin{aligned} p &= (2^0 \times 5^0 \times 2^0 \times 5^1 \times \dots \times 2^0 \times 5^b) \times (2^1 \times 5^0 \times 2^1 \times 5^1 \times \dots \times 2^1 \times 5^b) \times \dots \times (2^a \times 5^0 \times 2^a \times 5^1 \times \dots \times 2^a \times 5^b) \quad \text{— 3} \\ &= (2^{0(b+1)} \times 5^{0+1+\dots+b}) \times (2^{1(b+1)} \times 5^{0+1+2+\dots+b}) \times \dots \times (2^{a(b+1)} \times 5^{0+1+\dots+b}) \\ &= \left(2^0 \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \times \left(2^{b+1} \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \times \dots \times \left(2^{a(b+1)} \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \\ &= 2^{0+(b+1)+2(b+1)+\dots+a(b+1)} \times 5^{(a+1)\frac{b(b+1)}{2}} \\ &= 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}} \times 5^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}} \end{aligned}$$

$$p^2 = 2^{a(a+1)(b+1)} \times 5^{b(a+1)(b+1)} \quad \text{— 4}$$

$$\begin{aligned} n^N &= (2^a \times 5^b)^{(a+1)(b+1)} \\ &= 2^{a(a+1)(b+1)} \times 5^{b(a+1)(b+1)} \end{aligned}$$

إذن : العلاقة (1) محققة دائما .

$$p^2 = 20^{84} \quad \text{إذن : } p = 20^{42} \quad \text{— 5}$$

$$p^2 = 4^{84} \times 5^{84} \quad \text{أي :}$$

$$p^2 = 2^{168} \times 5^{84} \quad \text{أي :}$$

$$\left. \begin{aligned} (2) \dots a(a+1)(b+1) &= 168 \\ (3) \dots b(a+1)(b+1) &= 84 \end{aligned} \right\} \text{ منه :}$$

من العلاقة (3) : $(a+1)(b+1) = 84/b$ (b قاسم لـ 84)

$$a \times \frac{84}{b} = 168 \quad \text{إذن : العلاقة (2) تصبح :}$$

$$a/b = 2 \quad \text{أي :}$$

$$a = 2b$$

$$\text{المساواة (3) تصبح إذن : } b(2b+1)(b+1) = 84$$

لنبحث عن تحليل العدد 84 إلى ثلاث عوامل من بينها عاملين متتابعين b و b+1

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

نتيجة : العدد المطلوب هو $n = 2^6 \times 5^3$

$$\text{تحقيق : } 5^{84} = 20^{84} \quad ; \quad 4^{84} = 2^{168} \times 5^{84} = (2^6 \times 5^3)^{28} = n^{28} \quad \text{إذن : } p^2 = 20^{84}$$

التمرين - 12

n عدد طبيعي غير معدوم حيث N هو عدد قواسمه الموجبة .

برهن أن إذا كان N فردي فإن n هو مربع تام .

الحل - 12

ليكن $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_k : أعداد أولية مختلفة مثلي مثلي و α_k أسس طبيعية .

$$N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

إذن : إذا كان N فردي فإن كل من الأعداد $(\alpha_1 + 1)$ ، $(\alpha_2 + 1)$ ، ، $(\alpha_k + 1)$ هي أعداد فردية .
و عليه فإن الأسس α_1 ، α_2 ، ، α_k زوجية .

منه : العدد n هو مربع تام

التمرين - 13

x ، y عددان طبيعيان حيث $0 < x \leq y$

$$\text{نضع } \text{pgcd}(x; y) = d \text{ و } \text{ppcm}(x; y) = m$$

نريد تعيين x و y حيث $m^2 - 5d^2 = 2000$ (α)

1 - برهن أن إذا كانت الشكالة (x; y) تحقق المعادلة (α) فإن d^2 هو قاسم للعدد 2000

2 - حل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج القواسم المربعة التامة له

3 - برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي إذن القيم الممكنة لـ d

4 - استنتج القيم الممكنة للعددين x و y

الحل - 13

$$1 - \left. \begin{aligned} &\left. \begin{aligned} &\left. \begin{aligned} &x \text{ يقسم } d \\ &y \text{ يقسم } d \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} &x^2 \text{ يقسم } d^2 \\ &y^2 \text{ يقسم } d^2 \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} &x^2 \text{ يقسم } d^2 \\ &d^2 \text{ يقسم } 5y^2 \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } d^2 \text{ يقسم } x^2 - 5y^2 \end{aligned} \right\}$$

إذا كان (x; y) حل للمعادلة (α) فإن : $x^2 - 5y^2 = 2000$

إذن : d^2 يقسم 2000

$$2000 = 20 \times 100 = 4 \times 5 \times 4 \times 25 = 2^4 \times 5^3 \quad - 2$$

منه القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي :

$$\{1; 5^2; 2^2; 5^2 \times 2^2; 2^4; 5^2 \times 2^4; 5^2 \times 2^2; 2^2; 5^2; 1\} \text{ أي } \{(20)^2; (4)^2; (10)^2; (2)^2; (5)^2; 1\}$$

$$3 - m^2 - 5d^2 = 2000 \quad \text{إذن : } m^2 = 5d^2 + 2000$$

$$\text{أي } m^2 = 5(d^2 + 400)$$

منه : 5 يقسم m^2

لكن 5 أولي .

إذن 5 يقسم m

5 يقسم m إذن : $m = 5k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

المعادلة (α) تصبح إذن : $(5k)^2 - 5d^2 = 2000$

$$5d^2 = 25k^2 - 2000$$

$$d^2 = 5k^2 - 400$$

$$d^2 = 5(k^2 - 80)$$

إذن : 5 يقسم d^2

بما أن 5 أولي فإن 5 يقسم d

نتيجة : 5 يقسم d و 5 يقسم m إذن : 5 قاسم مشترك لـ d و m

منه القيم الممكنة لـ d^2 هي $\{20^2; 10^2; 5^2\}$

أي القيم الممكنة لـ d هي $\{20; 10; 5\}$

$$m^2 - 5d^2 = 2000 \quad \text{إذن : } m^2 = 2000 + 5d^2$$

d	$m^2 = 2000 + 5d^2$	m
5	$m^2 = 2000 + 125 = 2125$ مرفوض لأنه ليس مربع تام	/
10	$m^2 = 2000 + 500 = (50)^2$	50
20	$m^2 = 2000 + 2000 = 4000$ مرفوض لأنه ليس مربع تام	/

نتيجة : الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(d; m) = (10; 50)$

إذن : $(x; y) \in \{(10; 50); (50; 10)\}$ لكن $x < y$ إذن $(x; y) = (10; 50)$

التمرين 14

1 - حلل العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية

α و β عددان طبيعيين حيث $\alpha < \beta$

2 - حل في المجموعة $N \times N$ المعادلة $\alpha\beta = 105$

a و b عددان طبيعيين غير معدومين و غير أوليين فيما بينهما

نضع $\text{pgcd}(a; b) = \lambda$ و $\text{ppcm}(a; b) = \gamma$

3 - عين a و b حيث $95\lambda + 19\gamma = 1995$

$\lambda < 7$

الحل - 14

105	3	1995	3	- 1
35	5	665	5	
7	7	133	7	
1		19	19	
		1		

$$105 = 3 \times 5 \times 7 \quad 1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$$

2 - قواسم 105 هي $\{105; 15; 21; 3; 35; 5; 7; 1\}$

إذن : $\alpha\beta = 105$ تتدفى : $(\alpha; b) \in \{(1; 105); (7; 15); (5; 21); (35; 3); (3; 35); (21; 5); (15; 7); (105; 1)\}$

3 - λ يقسم γ إذن : λ يقسم 95λ منه λ يقسم $95\lambda + 19\gamma$

أي λ يقسم 1995

a و b ليس أوليان فيما بينهما إذن : $1 < \lambda$

$$1 < \lambda < 7$$

$\lambda \in \{3; 5\}$ إذن : λ يقسم 1995

لدينا : $95\lambda + 19\gamma = 1995$ إذن : $95\lambda = 1995 - 19\gamma$

λ	$19\gamma = 1995 - 95\lambda$	γ
3	$1995 - 585 = 1410$	$1410/19 = 74.21$
5	$1995 - 975 = 1020$	$1020/19 = 53.68$

نتيجة : $(\alpha; \beta) \in \{(3; 4)\}$ 2 - a, b, c, d, e حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها r إذن : $b = ar$; $c = ar^2$; $d = ar^3$; $e = ar^4$ منه : $28a^3 = e - b$ تكافئ $28a^3 = ar^4 - ar$ تكافئ $28a^3 = ar(r^3 - 1)$ تكافئ $28a^2 = r(r^3 - 1)$ لأن $a \neq 0$ تكافئ $r = 4$ و $a = 3$ (حسب السؤال (1))نتيجة : $a = 3$; $b = 12$; $c = 48$; $d = 192$; $e = 768$ تحقيق : $28a^3 = 28 \times 27 = 756$ $e - b = 768 - 12 = 756$

التمرين - 16

1 - α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما حيث $\alpha > \beta$ عين α و β حيث $\beta(\alpha^2 - 19) = 35$ 2 - (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها R حيث u_0 و R عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0 < R$ أوجد u_0 و R حتى يكون $35u_0^2 + 19u_1 - u_0R^3 = 0$ 3 - نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ أحسب S_n بدلالة n 4 - أوجد قيم n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 30

الحل - 16

1 - $\beta(\alpha^2 - 19) = 35$ إذن : α يقسم 35 بما أن α و β أوليان فيما بينهما فإن α يقسم 35منه : $\alpha \in \{1; 5; 7; 35\}$ لكن $\alpha > 1$ لأن $\beta \neq 0$ إذن : $\alpha \in \{5; 7; 35\}$ من أجل $\alpha = 5$: $5(25 - 19) = 35\beta$ إذن : $25 - 19 = 7\beta$ أي : $6 = 7\beta$ مستحيل .من أجل $\alpha = 7$: $7(49 - 19) = 35\beta$ إذن : $49 - 19 = 5\beta$ أي : $\beta = 6$ من أجل $\alpha = 35$: $35(35^2 - 19) = 35\beta$ منه : $1206 = \beta$ مرفوض لأن $\alpha > \beta$ نتيجة : القيم الممكنة لـ α و β هي : $\alpha = 7$ و $\beta = 6$ 2 - $35u_0^2 + 19u_1 - u_0R^3 = 0$ يكافئ $35u_0^2 = u_0R^3 - 19u_1$ يكافئ $35u_0^2 = u_0R^3 - 19u_0R$ لأن $u_1 = u_0R$ يكافئ $35u_0^2 = u_0R(R^2 - 19)$ يكافئ $35u_0 = R(R^2 - 19)$ لأن $u_0 \neq 0$ يكافئ $u_0 = 6$ و $R = 7$ (حسب السؤال (1))3 - $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= u_0 \times \frac{R^{n+1} - 1}{R - 1}$$

$$= 6 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}$$

$$= 7^{n+1} - 1$$

4 - يكون S_n قابلا للقسمة على 30 إذا و فقط إذا كان S_n مضاعفا لـ 5 و مضاعفا لـ 6لدينا : $7 \equiv 1[6]$ إذن : $7^{n+1} \equiv 1[6]$

$$7^{n+1} - 1 \equiv 0[6] \text{ منه}$$

إذن : S_n مضاعف 6

لمعين إذن قيم n حتى يكون S_n مضاعفاً لـ 5 كمايلي :

$$7^n \equiv 2^n[5] \text{ إذن :}$$

$$7^{n+1} \equiv 2 \times 2^n[5] \text{ منه :}$$

ندرس بواقى قسمة 2^n على 5

$$2^0 \equiv 1[5]$$

$$2^1 \equiv 2[5]$$

$$2^2 \equiv 4[5]$$

$$2^3 \equiv 3[5]$$

$$2^4 \equiv 1[5] \text{ منه :}$$

$n \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$2^n \equiv ?[5]$	1	2	4	3
$2 \times 2^n \equiv ?[5]$	2	4	3	1
$2 \times 2^n - 1 \equiv ?[5]$	1	3	2	0

نتيجة : يكون $7^{n+1} - 1 \equiv 0[5]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 3[4]$

أي يكون S_n قابلاً للقسمة على 30 إذا و فقط إذا كان $n = 4k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$ و هي قيم n المطلوبة .

التمرين 17

1 - أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ، 32785 ، 2905

2 - حل في $Z \times Z$ المعادلة $7x + 6y = 79$ باستعمال المساواة $72 + 7 = 79$

إشترى نادي كرة يد ملابس رياضية . إذا علمت أن ثمن بدلة لاعب هو 2905 DA و ثمن بدلة لاعبة هو 2490 DA و أن النادي قد دفع مبلغ 32735 DA في المجموع . فما هو عدد اللاعبين و اللاعبات ؟

الحل 17

32785	5	2905	5	2490	2	-1
6557	83	581	7	1245	3	
79	79	83	83	415	5	
1		1		83	83	
				1		

نتيجة : القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ، 2905 ، 32785 هو $83 \times 5 = 415$

2 - $72 + 7 = 79$ إذن : $7(1) + 6(12) = 79$

إذن : المعادلة $7x + 6y = 79$ تكافئ $7x + 6y = 7(1) + 6(12)$

تكافئ $7x - 7(1) = 6(12) - 6y$

تكافئ $7(x - 1) = 6(12 - y)$

إذن : 6 يقسم $x - 1$

منه : $x - 1 = 6k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $7 \times 6k = 6(12 - y)$

إذن : $12 - y = 7k$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} x - 1 = 6k \\ 12 - y = 7k \end{array} \right\}$ إذن : $\left. \begin{array}{l} x = 1 + 6k \\ y = 12 - 7k \end{array} \right\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

3 - ليكن x عدد اللاعبين و y عدد اللاعبات .

إذن : $2905x + 2490y = 32785$

أي : $7x + 6y = 79$ (بالقسمة على 415)

إذن : الثنائية $(x; y)$ هي حل للمعادلة $7x + 6y = 79$

منه : $x = 1 + 6k$ و $y = 12 - 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

لكن x و y أعداد طبيعية إذن $x \geq 0$ و $y \geq 0$

منه : $\left. \begin{array}{l} 1 + 6k \geq 0 \\ 12 - 7k \geq 0 \end{array} \right\}$ أي $\left. \begin{array}{l} k \geq -1/6 \\ k \leq 12/7 \end{array} \right\}$

أي $\left. \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ k \leq 1 \end{array} \right\}$ لأن k عدد صحيح .

إذن : $k \in \{0; 1\}$

نتيجة : إما $(1; 12) - (x \cdot y)$: لاعب و 12 لعبة .
أو $(7; 5) - (x; y)$: 7 لاعبين و 5 لاعبات .

التمرين - 18

1 - عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 : 1497 : 2994

لتكن المعادلة $1996x - 1497y = 2994$ (1) في $Z \times Z$

2 - أثبت أن إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن x مضاعف 3 و y مضاعف 2 ثم استنتج هذه الحلول

3 - عين حلول المعادلة (1) التي تحقق $xy = 1950$

الحل - 18

$$\begin{array}{r|l} 2994 & 2 \\ 1497 & 3 \\ 499 & 499 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1497 & 3 \\ 499 & 499 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1996 & 2 \\ 998 & 2 \\ 499 & 499 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

إذن : القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 هو 499

2 - ليكن $(x; y)$ حل للمعادلة (1)

$1996x - 1497y = 2994$ إذن : $4x - 3y = 6$ (بالقسمة على 499)

$$\left. \begin{array}{l} 4x = 3y + 6 \\ 3y = 4x - 6 \end{array} \right\} \text{ منه}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots 4x = 3(y + 2) \\ (2) \dots\dots 3y = 2(2x - 3) \end{array} \right\} \text{ أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x \text{ يقسم } 3 \\ 3y \text{ يقسم } 2 \end{array} \right\} \text{ منه}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x \text{ يقسم } 3 \text{ لأن } x \text{ لأن } 3 \text{ أولي مع } 4 \\ 3y \text{ يقسم } 2 \text{ لأن } y \text{ لأن } 2 \text{ أولي مع } 3 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ مضاعف } 3 \\ y \text{ مضاعف } 2 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

نضع $x = 3k$ حيث $k \in Z$ إذن المساواة (1) تصبح :

$$4k = y + 2 \quad \text{منه :}$$

$$y = 4k - 2 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : حلول المعادلة (1) في $Z \times Z$ هي الثنائيات $\{(3k; 4k - 2)\}$ حيث $k \in Z$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3k \\ y = 4k - 2 \end{array} \right\} \text{ لدينا } \quad \text{حيث } k \in Z$$

$$3k(4k - 2) = 1950 \quad \text{يكافئ } xy = 1950$$

$$6k(2k - 1) = 1950 \quad \text{يكافئ}$$

$$k(2k - 1) = 325 \quad \text{يكافئ}$$

$$2k^2 - k - 325 = 0 \quad \text{يكافئ معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الصحيح } k$$

$$\Delta = 1 + 8(325) = 2601 = (51)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{1 - 51}{4} = -\frac{50}{4} = -\frac{25}{2} \quad \text{مرفوض} \\ k_2 = \frac{1 + 51}{4} = \frac{52}{4} = 13 \quad \text{مقبول} \end{array} \right.$$

$$x = 3 \times 13 = 39 \quad \text{إذن : } k = 13$$

$$y = 4 \times 13 - 2 = 50$$

نتيجة : الثنائية المطلوبة هي $(x; y) = (39; 50)$

$$\left. \begin{array}{l} 39 \times 50 = 1950 \\ 4(39) - 3(50) = 156 - 150 = 6 \end{array} \right\} \text{ تحقيق :}$$

التمرين - 19

- 1 - حل في $Z \times Z$ المعادلة $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(3; 1)$ حل لها .
 لتكن في $Z \times Z$ المعادلة $45x - 28y = 130$ (1)
 2 - بين أن إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف 2 و y مضاعف 5
 ثم إستنتج حلول المعادلة (1)
 3 - عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام التعداد ذو الأساس 9 و يكتب $5\beta\beta6$ في نظام التعداد ذو الأساس 7
 عيّن α و β ثم أكتب N في النظام العشري
 الحل - 19

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} 9x' - 14y' &= 13 \\ 9(3) - 14(1) &= 13 \end{aligned} \right\} \text{ - 1} \\
 & \text{إذن : } 9x' - 14y' = 9(3) - 14(1) \\
 & \text{منه } 9x' - 9(3) = 14y' - 14(1) \\
 & \text{أي } 9(x' - 3) = 14(y' - 1) \\
 & \text{منه } 14 \text{ يقسم } x' - 3 \\
 & \text{أي } x' - 3 = 14k \text{ حيث } k \in Z \\
 & \text{إذن : } 9 \times 14k = 14(y' - 1) \\
 & \text{منه } 9k = y' - 1 \\
 & \left. \begin{aligned} x' - 3 &= 14k \\ y' - 1 &= 9k \end{aligned} \right\} \text{ : نتيجة : } \text{إذن : } \left. \begin{aligned} x' &= 14k + 3 \\ y' &= 9k + 1 \end{aligned} \right\} \text{ حيث } k \in Z \\
 & \text{2 - ليكن } (x; y) \text{ حل للمعادلة (1) إذن } 45x - 28y = 130 \\
 & \left. \begin{aligned} 45x &= 28y + 130 \\ 28y &= 45x - 130 \end{aligned} \right\} \text{ منه } \\
 & \left. \begin{aligned} 45x &= 2(14y + 65) \\ 28y &= 5(9x - 26) \end{aligned} \right\} \text{ أي } \\
 & \left. \begin{aligned} 45x &\text{ يقسم } 2 \\ 28y &\text{ يقسم } 5 \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \\
 & \left. \begin{aligned} 2 &\text{ يقسم } x \\ 5 &\text{ يقسم } y \end{aligned} \right\} \text{ منه } \\
 & \left. \begin{aligned} x &= 2x' \\ y &= 5y' \end{aligned} \right\} \text{ : نتيجة : } \text{إذن : } \left. \begin{aligned} x &= 2(14k + 3) \\ y &= 5(9k + 1) \end{aligned} \right\} \text{ أي } \\
 & \text{حيث } x' \text{ و } y' \text{ أعداد صحيحة .} \\
 & \text{بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : } 45(2x') - 28(5y') = 130 \\
 & \text{أي : } 2 \times 5(9x' - 14y') = 130 \\
 & 9x' - 14y' = 13 \text{ أي } \\
 & \left. \begin{aligned} x' &= 14k + 3 \\ y' &= 9k + 1 \end{aligned} \right\} \text{ (1) منه حسب السؤال } \\
 & \left. \begin{aligned} x &= 2(14k + 3) \\ y &= 5(9k + 1) \end{aligned} \right\} \text{ أي } \\
 & \text{حيث } k \in Z \text{ (1) هي حلول المعادلة} \\
 & \text{3 - } N = 2\alpha\alpha3 \text{ في النظام ذو الأساس 9 : } 0 \leq \alpha \leq 8 \\
 & 2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = N \\
 & N = 5\beta\beta6 \text{ في النظام ذو الأساس 7 : } 0 \leq \beta \leq 6 \\
 & 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6 = N \\
 & \left. \begin{aligned} 0 \leq \beta \leq 6 \\ 0 \leq \alpha \leq 8 \end{aligned} \right\} \text{ : نتيجة : } \\
 & 2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6 \text{ (2)} \\
 & 1458 + 81\alpha + 9\alpha + 3 = 1715 + 49\beta + 7\beta + 6 \\
 & 90\alpha + 1461 = 56\beta + 1721 \\
 & 90\alpha - 56\beta = 260 \\
 & \text{المعادلة (2) تكافئ} \\
 & \text{تكافئ} \\
 & \text{تكافئ}$$

$$45\alpha - 28\beta = 130$$

تكافئ

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 28k + 6 \\ \beta = 45k + 5 \end{array} \right\} \text{تكافئ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ حسب السؤال (2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq 28k + 6 \leq 8 \\ 0 \leq 45k + 5 \leq 6 \end{array} \right\} \text{لكن } \left. \begin{array}{l} 0 \leq \alpha < 8 \\ 0 \leq \beta \leq 6 \end{array} \right\} \text{إذن}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6 \leq 28k \leq 2 \\ -5 \leq 45k \leq 1 \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6/28 \leq 28k \leq 2/28 \\ -5/45 \leq 45k \leq 1/45 \end{array} \right\} \text{أو}$$

$$k = 0 \quad (\text{لأن } k \in \mathbb{Z})$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 6 \\ \beta = 5 \end{array} \right\} \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} N &= 1458 + 81(6) + 9(6) + 3 \\ &= 1458 + 486 + 54 + 3 \\ &= 2001 \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

التمرين - 20

1 - أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 180 و 225

2 - حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $225x - 180y = 90$ (1)3 - عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$ 4 - a و b عدنان طبيعبان يكتبان على الترتيب 52 و 252 في النظام ذو الأساس α و يكتبان 44 و 206 في النظام ذو الأساس β عين α و β ثم استنتج a و bالحل - 20

180	2	225	5	- 1
90	2	45	5	
45	5	9	3	
9	3	3	3	
3	3	1	1	
1				

$$\text{pgcd}(225; 180) = 45 \quad \text{نتيجة :}$$

$$225x - 180y = 90 \quad \text{تكافئ } 5x - 4y = 2 \quad \text{2 -}$$

$$5x - 4y = 5(2) - 4(2) \quad \text{تكافئ}$$

$$5x - 5(2) = 4y - 4(2) \quad \text{تكافئ}$$

$$5(x - 2) = 4(y - 2) \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{إذن : } x - 2 = 4k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{منه : } 5 \times 4k = 4(y - 2)$$

$$\text{أي : } y - 2 = 5k$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{array} \right\} \text{منه } \left. \begin{array}{l} x - 2 = 4k \\ y - 2 = 5k \end{array} \right\} \text{نتيجة : حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$|x - y + 1| < 2 \quad \text{3 - } \quad \text{تكافئ } -2 < x - y + 1 < 2$$

$$-2 < (4k + 2) - (5k + 2) + 1 < 2 \quad \text{تكافئ}$$

$$-2 < 4k + 2 - 5k - 2 + 1 < 2 \quad \text{تكافئ}$$

$$-2 < -k + 1 < 2 \quad \text{تكافئ}$$

$$-3 < -k < 1 \quad \text{تكافئ}$$

$$-1 < k < 3 \quad \text{تكافئ}$$

$$k \in \{0; 1; 2\} \quad \text{تكافئ}$$

من اجل $k = 0$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$
 من اجل $k = 1$: $\begin{cases} x = 4 + 2 \\ y = 5 + 2 \end{cases}$: ان : $\begin{cases} x = 6 \\ y = 7 \end{cases}$
 من اجل $k = 2$: $\begin{cases} x = 8 + 2 \\ y = 10 + 2 \end{cases}$: ان : $\begin{cases} x = 10 \\ y = 12 \end{cases}$
 نتيجة : الثنائيات التي تحقق $|x - y + 1| < 2$ هي $\{(2 : 2) : (6 : 7) : (10 : 12)\}$

$$\left. \begin{aligned} a &= 5\alpha + 2 \\ b &= 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 \end{aligned} \right\} \text{ و } 5 < \alpha - 4$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 4\beta + 4 \\ b &= 2\beta^2 + 6 \end{aligned} \right\} \text{ و } 6 < \beta$$

$$\left. \begin{aligned} 5\alpha + 2 &= 4\beta + 4 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 &= 2\beta^2 + 6 \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} 5\alpha - 4\beta &= 2 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ أي}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 4k + 2 \text{ و } \beta = 5k + 2 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ (حسب السؤال (2))} \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 &= 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned} \right\} \text{ أي}$$

نعوض α و β في المعادلة (2)

$$2(4k + 2)^2 + 5(4k + 2) - 2(5k + 2)^2 - 4 = 0$$

$$2(16k^2 + 16k + 4) + 20k + 10 - 2(25k^2 + 20k + 4) - 4 = 0 \quad \text{أي}$$

$$32k^2 + 32k + 8 + 20k + 10 - 50k^2 - 40k - 8 - 4 = 0 \quad \text{أي}$$

$$-18k^2 + 12k + 6 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$3k^2 - 2k - 1 = 0 \text{ معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الصحيح } k$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$k_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-1}{3} \text{ مرفوض } \quad ; \quad k_1 = \frac{2+4}{6} = 1$$

نتيجة : $k = 1$ إذن : $\left. \begin{aligned} \alpha &= 4 + 2 = 6 \text{ مقبول لأن } 5 < 6 \\ \beta &= 5 + 2 = 7 \text{ مقبول لأن } 6 < 7 \end{aligned} \right\} (5 < \alpha) \quad (6 < \beta)$

ان : $\left. \begin{aligned} a &= 52 \text{ في النظام ذو الأساس 6 منه} \\ b &= 252 \text{ في النظام ذو الأساس 6 منه} \end{aligned} \right\}$

$$a = 5 \times 6 + 2 = 32$$

$$b = 2 \times 36 + 5 \times 6 + 2 = 104$$

التمرين - 21

لتكن المعادلة $43x - 13y = \lambda$ (*) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث λ عدد صحيح ثابت

1 - تحقق أن الثنائية $(-3\lambda ; -10\lambda)$ هي حل للمعادلة (*)

2 - حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (*)

3 - N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذو الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta 0 \gamma \gamma}$ في النظام ذو الأساس 5

(أ) بين أن $43c - 13\beta = \gamma$

(ب) عين α ، β ، γ ثم أكتب N في النظام العشري

الحل - 21

$$43(-3\lambda) - 13(-10\lambda) = -129\lambda + 130\lambda = \lambda \quad -1$$

إذن : الثنائية $(-3\lambda ; -10\lambda)$ هي حل للمعادلة (*)

$$43x - 13y = \lambda \quad -2 \quad \text{تكافئ} \quad 43x - 13y = 43(-3\lambda) - 13(-10\lambda)$$

$$43x - 43(-3\lambda) - 13y - 13(-10\lambda)$$

$$43(x + 3\lambda) = 13(y + 10\lambda) \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{إذن : } x + 3\lambda = 13k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$43 \times 13k - 13(y + 10\lambda) \quad \text{منه}$$

$$y + 10\lambda = 43k \quad \text{منه}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 13k - 3\lambda \\ y &= 43k - 10\lambda \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} 3\lambda &= 13k \\ y + 10\lambda &= 43k \end{aligned} \right\} \text{ نتيجة :}$$

3- ليكن $0 \leq \alpha \leq 5$ و $0 \leq \beta \leq 4$ و $0 \leq \gamma \leq 4$

$$N = \alpha \times 6^4 + \beta \times 6^3 + \alpha \times 6^2 + \beta \times 6 + \alpha \quad \text{ (أ) في الأساس 6 :}$$

$$= 1296\alpha + 216\beta + 36\alpha + 6\beta + \alpha$$

$$= 1333\alpha + 222\beta$$

$$N = \beta \times 5^4 + \gamma \times 5^3 + \gamma \times 5 + \gamma \quad \text{ في الأساس 5 :}$$

$$= 625\beta + 25\gamma + 6\gamma$$

$$= 625\beta + 31\gamma$$

$$1333\alpha + 222\beta = 625\beta + 31\gamma \quad \text{ نتيجة :}$$

$$\text{إذن : } 1333\alpha - 403\beta = 31\gamma \quad \text{ (بالقسمة على 31)}$$

منه : $43\alpha - 13\beta = \gamma$ و هو المطلوب

(ب) لدينا $43\alpha - 13\beta = \gamma$ إذن : $(\alpha; \beta)$ هي حلول المعادلة $43x - 13y = \gamma$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 13k - 3\gamma \\ \beta &= 43k - 10\gamma \end{aligned} \right\} \text{ فمن (1) فإنه حيث } k \in \mathbb{Z}$$

بما أن $0 \leq \gamma \leq 4$ و $0 \leq \alpha \leq 5$ و $0 \leq \beta \leq 4$ نميز الحالات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 13k \\ \beta &= 43k \end{aligned} \right\} \text{ الحالة (1) } \gamma = 0 \text{ إذن :}$$

إذن : $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ (لأن القيمة الوحيدة لـ k حيث $0 \leq 13k \leq 5$ هي $k = 0$)

إذن : $N = 0$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 13k - 3 \\ \beta &= 43k - 10 \end{aligned} \right\} \text{ الحالة (2) } \gamma = 1 \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq 13k - 3 \leq 5 \\ 0 &\leq 43k - 10 \leq 4 \end{aligned} \right\} \text{ منه}$$

$$\left. \begin{aligned} 3 &\leq 13k \leq 8 \\ 10 &\leq 43k \leq 14 \end{aligned} \right\} \text{ إذن}$$

$$\left. \begin{aligned} 3/13 &\leq k \leq 8/13 \\ 10/43 &\leq k \leq 14/43 \end{aligned} \right\} \text{ أي}$$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq 13k - 6 \leq 5 \\ 0 &\leq 43k - 20 \leq 4 \end{aligned} \right\} \text{ الحالة (3) } \gamma = 2 \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} 6/13 &\leq k \leq 11/13 \\ 20/43 &\leq k \leq 24/43 \end{aligned} \right\} \text{ أي}$$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq 13k - 9 \leq 5 \\ 0 &\leq 43k - 30 \leq 4 \end{aligned} \right\} \text{ الحالة (4) } \gamma = 3 \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} 9/13 &\leq k \leq 14/13 \\ 30/43 &\leq k \leq 34/43 \end{aligned} \right\} \text{ إذن،}$$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq 13k - 12 \leq 5 \\ 0 &\leq 43k - 40 \leq 4 \end{aligned} \right\} \text{ الحالة (5) } \gamma = 4 \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} 12/13 &\leq k \leq 17/13 \\ 40/43 &\leq k \leq 44/43 \end{aligned} \right\} \text{ إذن،}$$

منذ $k = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 13 \quad 12 \quad 1 \\ \beta = 43 - 40 = 3 \end{array} \right\} \text{ إذن}$$

نتيجة : $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $\gamma = 4$ أو $\alpha = \beta - \gamma = 0$ إذن : $N = 3 \times 625 + 4 \times 25 + 4 \times 5 + 4 = 1999$ أو $N = 0$

التمرين 22

1 - عين $\text{pgcd}(2505 ; 3006)$

لنكن في $Z \times Z$ المعادلة $2505x - 3006y = \alpha$ (*) حيث $\alpha \in Z$

2 - عين شرط على α حتى تقبل المعادلة (1) حلولاً في $Z \times Z$

3 - عين هذه الحلول من أجل $\alpha = 2004$

الحل - 22

3006	2	2505	3	- 1
1503	3	835	5	
501	3	167	167	
167	167	1		
1				

إذن : $\text{pgcd}(2505 ; 3006) = 3 \times 167 = 501$

2 - إذا كان $(x ; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن $2505x - 3006y = \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} 2505x \text{ يقسم } 501 \\ 3006y \text{ يقسم } 501 \end{array} \right\} \text{ لدينا } \left. \begin{array}{l} 2505 \text{ يقسم } 501 \\ 3006 \text{ يقسم } 501 \end{array} \right\} \text{ إذن}$$

منه 501 يقسم $2505x - 3006y$

أي 501 يقسم α

نتيجة : حتى تقبل المعادلة (1) حلولاً في $Z \times Z$ يكفي و يلزم أن يكون α مضاعف للعدد 501
3 - $\alpha = 2004$

لدينا $2004 = 4 \times 501$ إذن : المعادلة (1) تقبل حلولاً في $Z \times Z$

$$5x - 6y = 4 \quad \text{تكافئ} \quad 2505x - 3006y = 2004$$

$$5x - 6y = 5(2) - 6(1) \quad \text{تكافئ}$$

$$5x - 5(2) = 6y - 6(1) \quad \text{تكافئ}$$

$$5(x - 2) = 6(y - 1) \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{إذن : } x - 2 = 6k \quad \text{حيث } k \in Z$$

$$\text{منه : } 5 \times 6k = 6(y - 1)$$

$$\text{أي } y - 1 = 5k$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 = 6k \\ y - 1 = 5k \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} x = 6k + 2 \\ y = 5k + 1 \end{array} \right\} \text{ حيث } k \in Z$$

التمرين 23

لنكن المعادلة $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ (1) ذات المجهول x في مجموعة الأعداد الناطقة .
(u و v عددين صحيحين)

الجزء I

نفرض أن $x = \frac{14}{39}$ هو حل للمعادلة (1)

1 - بين أن العددين u و v يحققان العلاقة $14u + 39v = 1129$

2 - باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد الثنائية $(x ; y)$ من $Z \times Z$ و التي تحقق المعادلة $14u + 39v = 1$

3 - تحقق أن الثنائية $(9 ; -25)$ هي حل للمعادلة $14u + 39v = 1$

4 - إستنتج ثنائية $(x_0 ; y_0)$ حلاً خاصاً للمعادلة $14u + 39v = 1129$ ثم أعط الحل العام لهذه المعادلة

5 - من بين حلول المعادلة $14u + 39v = 1129$ عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

الجزء II

1 - حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين 78 و 14 ثم إستنتج مجموعة قواسم كل منهما .

2 - ليكن $x = \frac{P}{Q}$ حل نادر للمعادلة (1)

برهن أن إذا كان P و Q أوليان فيما بينهما فإن P يقسم 14 و Q يقسم 78
 3 - استنتج عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي يمكن أن تكون حلولاً للمعادلة (1). ثم أكتب من بين هذه الحلول الموجبة منها.

الحل - 23

$$78\left(\frac{14}{39}\right)^2 + u\left(\frac{14}{39}\right)^2 + v\left(\frac{14}{39}\right) - 14 = 0 \quad \text{إذن : } x = \frac{14}{39} - 1$$

$$78(14^3) + 14^2 \times 39 u + 14 \times 39^2 v - 14 \times 39^3 = 0 \quad \text{منه :}$$

$$78 \times 14^2 + 14 \times 39 u + 39^2 v - 39^3 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$2 \times 14^2 + 14 u + 39 v - 39^2 = 0 \quad \text{ي :}$$

$$14 u + 39 v = 39^2 - 2 \times 14^2 \quad \text{أي}$$

$$14 u + 39 v = 1129 \quad \text{منه :}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 3} \\ 9 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 11} \\ 11 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \overline{) 14} \\ 28 \quad 11 \end{array}$$

- 2

$$11 = 39 - 14(2)$$

$$3 = 14 - 11(1)$$

$$2 = 11 - 3(3)$$

$$1 = 14 - 11(1) - 11 + 3(3) \quad \text{إذن : } 1 = 3 - 2(1)$$

$$1 = 14 - 11(2) + 3(3) \quad \text{أي}$$

$$1 = 14 - 2[39 - 14(2)] + 3[14 - 11(1)] \quad \text{منه}$$

$$1 = 14 - 39(2) + 14(4) + 14(3) - 11(3) \quad \text{أي}$$

$$1 = 14(8) - 39(2) - 3[39 - 14(2)] \quad \text{أي}$$

$$1 = 14(8) - 39(2) - 39(3) + 14(6) \quad \text{منه}$$

$$1 = 14(14) + 39(-5) \quad \text{أي}$$

$$(x; y) = (14; -5) \quad \text{منه : الثنائية المطلوبة هي}$$

$$14(-25) + 39(9) = -350 + 351 = 1 \quad - 3$$

$$14 u + 39 v = 1 \quad \text{إذن : فعلا الثنائية } (-25; 9) \text{ حل للمعادلة}$$

$$14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129) = 1129 \quad \text{نتيجة : } 14(-25) + 39(9) = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$14 u + 39 v = 14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129) \quad \text{إذن :}$$

$$14(u + 25 \times 1129) = 39(9 \times 1129 - v) \quad \text{أي}$$

$$14 \quad \text{منه : } 39 \text{ يقسم } (u + 25 \times 1129) \text{ لأن } 39 \text{ أولي مع } 14$$

$$u + 25 \times 1129 = 39 k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$14 \times 39 k = 39(9 \times 1129 - v) \quad \text{منه :}$$

$$9 \times 1129 - v = 14 k \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} u - 39 k - 25 \times 1129 \\ v = 9 \times 1129 - 14 k \end{array} \right\} \quad \text{إذن : } \left. \begin{array}{l} u + 25 \times 1129 - 39 k \\ 9 \times 1129 - v - 14 k \end{array} \right\} \quad \text{نتيجة :}$$

$$u = 5 \quad \text{عدد طبيعي إذا و فقط إذا كان } u \geq 0 \text{ لأن } u \in \mathbb{Z}$$

$$39 k - 25 \times 1129 \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$k \geq \frac{25 \times 1129}{39} \quad \text{أي}$$

$$k \geq 723,71 \quad \text{أي}$$

$$\text{منه : } k \geq 724 \text{ لأن } k \text{ عدد صحيح .}$$

$$\text{إذن : يكون } u \text{ أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان } k = 724$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 31 & 25 \\ \hline 25 & 1 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 87 & 31 \\ \hline 62 & 2 \\ \hline 25 & \end{array}$$

$$(1) \dots\dots\dots 25 = 87 - 31(2)$$

$$(2) \dots\dots\dots 6 = 31 - 25(1)$$

$$(3) \dots\dots\dots 1 = 25 - 6(4)$$

نعوض (1) و (2) في (3) فنحصل على :

$$1 = 87 - 31(2) - 4[31 - 25(1)]$$

$$(4) \dots\dots\dots 1 = 87 - 31(6) + 25(4) \quad \text{أي :}$$

$$1 = 87 - 31(6) + 4[87 - 31(2)] \quad \text{نعوض (1) في (4) أي :}$$

$$1 = 87(5) + 31(-14)$$

نتيجة : الثانية (5 ; -14) حل خاص للمعادلة $87u + 31v = 1$

الفهرس

الصفحة	المحور
1	المحور 1 : الأعداد المركبة
11	حارل تمارين الكتاب المدرسي
55	حلول لتمامين نماذج للبكلوريا
83	المحور 2 : التثابه المباشر
86	حلول تمارين الكتاب المدرسي
106	حلول لتمامين نماذج للبكلوريا
131	المحور 3 : المقاطع المستوية للسطوح
137	حلول تمارين الكتاب المدرسي
162	المحور 4 : الأعداد الأولية
166	حلول تمارين الكتاب المدرسي
192	حلول لتمامين نماذج للبكلوريا

سلسلة هباج

TEL : 0773 26 52 81

BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

KIMOU.

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

➔ حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي

➔ حلول مفصلة لتمرين نموذجية

➔ حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلولة بالتفصيل

الجزء

5

3^e Année Secondaire : Mathématiques

سلسلة هباج

KIMOU.

الرياضيات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نماذج للبكالوريا

الجزء الخامس

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي - رياضيات - علوم تجريبية

سلسلة هياج

يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكل الشعب العلمية منها و التكنولوجيا .

— محتوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

— يشمل هذا الجزء من السلسلة على أربع محاور من البرنامج :

- الأعداد المركبة
- التشابه المباشر
- المقاطع المستوية للسطوح
- الأعداد الأولية

— يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

— كما حرصت أن أعالج في نهاية كل درس ، مجموعة تطبيقات للتصحيح الذاتي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

— كما حرصت أن أعالج في نهاية كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

أملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هياج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 0773 26 52 81

الأعداد المركبة

تعريف : سمي عددا مركبا كل عدد z يكتب من الشكل $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$
مثلا : $5 - 2i$: $-i$

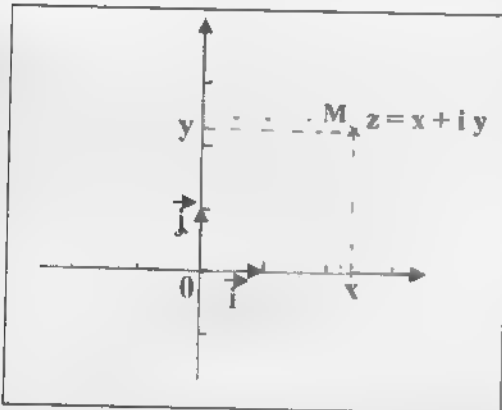
ملاحظة : نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ C
إذا كان $z = x + iy$ عددا مركبا فإن x يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له بـ $Re(z)$ و y يسمى الجزء التخيلي و نرمز له $Im(z)$.

إذا كان $Im(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي
إذا كان $Re(z) = 0$ نقول أن z عدد تخيلي صرف أو تخيلي محض أو تخيلي نحت
يكون z عددا مركبا معدوما إذا و فقط إذا كان $Re(z) = Im(z) = 0$

الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z
يكون z و z' عددا مركبا متساويان إذا و فقط إذا كان $\left. \begin{array}{l} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{array} \right\}$

التمثيل الهندسي

نسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$
كل عدد مركب من الشكل $z = x + iy$ حيث $(x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$ له صورة في المستوي هي النقطة M
ذات الإحداثيات $(x; y)$



الشعاع $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هو أيضا صورة للعدد المركب z و العكس صحيح حيث :
كل نقطة $M(x; y)$ من المستوي هي لاحقة لعدد مركب $z = x + iy$
كل شعاع $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ من المستوي هو لاحقة لعدد مركب $z = x + iy$

نتائج :

إذا كان z عدد حقيقي فإن صورته هي نقطة من محور الفواصل .
إذا كان z عدد تخيلي صرف فل صورته هي نقطة من محور التراتيب
المستوي في هذه الحالة يسمى المستوي المركب

نشاط :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$
 x و y عددان حقيقيان . لنكن (S) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي حيث $z = x^2 + (1 + i)y - i$ ($i^2 = -1$)
عين المجموعة (S) في كل حالة من الحالات التالية :

$z = 1$ عدد حقيقي $z = 2$ تخيلي صرف

الحل :

لنكتب z على شكله الجبري :

$$z = x^2 + (1 + i)y - i = x^2 + y + iy - i = (x^2 + y) + (y - 1)i$$

1 - يكون z حقيقي إذا و فقط إذا كان $y - 1 = 0$ أي $y = 1$
إذن : هي هذه الحالة (S) هو المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (موازي لمحور الفواصل)
2 - يكون z تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $x^2 + y = 0$ أي $y = -x^2$
إذن : هي هذه الحالة (S) هو منحنى الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -x^2$

مرافق عدد مركب :

تعريف : $z = x + iy$ عدد مركب يكتب على شكله الجبري

نسمي مرافق z العدد المركب $\bar{z} = x - iy$ و المعروف بـ

$$\text{أمثلة : } 1 + 3i \text{ و } -3 - i \text{ و } -3 + 0i \text{ و } -3 - i$$

تفسير هندسي :

في المستوي المركب إذا كانت M صورة العدد المركب z فإن M' صورة العدد المركب \bar{z} هي نظيرة النقطة M

بالنسبة الى محور العواصل .

عمليات على الاعداد المركبة :

 z و z' عدنان مركبان يكتبان على شكلهما الجبري على الترتيب $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \quad (*)$$

$$z \times z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y' + ix'y + i^2 yy' \quad (**)$$

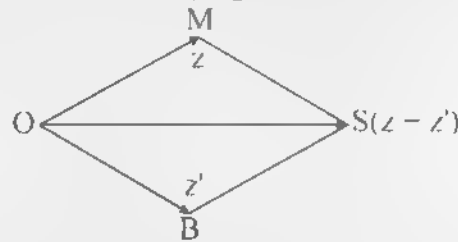
$$= xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

$$z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ملاحظة :}$$

اذا : الجداء $z \times \bar{z}$ هو عدد حقيقي .نتيجة هامة : لكتابة العدد $1/z$ (حيث $z \neq 0$) على شكله الجبري يكفي أن نحول مقامه الى عدد حقيقي .

$$\text{مثلا : } \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين

في المستوي المركب نعتبر النقطة M صورة العدد المركب z و النقطة B صورة العدد المركب z' العدد $z + z'$ هو لاحقة الشعاع $\vec{OM} + \vec{OB}$ حيث O هو مبدأ المعلماذا : النقطة S حيث الرباعي $OMSB$ متوازي اضلاع هي صورة العدد المركب $z + z'$ (الشعاع \vec{OS} هو محصلة الشعاعين \vec{OM} و \vec{OB})

تطبيق :

1 - اكتب كل من الاعداد $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$ على شكلها الجبري2 - ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n كتابة العدد i^n على شكله الجبري

الحل :

$$i^7 = i \times i^6 = -i \quad i^5 = i \times i^4 = i \quad i^3 = i^2 \times i = -i \quad -1$$

$$i^8 = (i^4)^2 = 1 \quad i^6 = i \times i^5 = (i)^2 = -1 \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1 \quad \text{2 - إذا كان } n = 4k \text{ فإن :}$$

$$i^n = i^{4k+1} = i \times i^{4k} = i \quad \text{إذا كان } n = 4k + 1 \text{ فإن :}$$

$$i^n = i^{4k+2} = i^2 \times i^{4k} = (-1) \times 1 = -1 \quad \text{إذا كان } n = 4k + 2 \text{ فإن :}$$

$$i^n = i^{4k+3} = i^3 \times i^{4k} = -i \quad \text{إذا كان } n = 4k + 3 \text{ فإن :}$$

لاحقة شعاع كفي (مرجح جملة)

المستوي المركب مسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ A و B نقطتان لاحتقتهما على الترتيب z_A و z_B العدد المركب $z_B - z_A$ هو لاحقة الشعاع \vec{AB} نتيجة : إذا كان a و b عدنان حقيقيان حيث $a + b \neq 0$ فإن مرجح الجملة $\{(A; a); (B; b)\}$ له اللاحقة

$$\frac{a z_A + b z_B}{a + b}$$

ملاحظة : يمكن لهذه النتيجة ان تعمم الى n نقطة مختلفة

خواص مرافق عدد مركب :

ليكن z و z' عددين مركبين . لدينا الخواص التالية :

$$\bar{\bar{z}} = z \quad -1$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad -2$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad -3$$

$$z \times \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 \quad -4$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad -5$$

$$z \times \bar{z}' = z' \times \bar{z} \quad -6$$

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ حيث } (z^n) = (\bar{z})^n \quad -7$$

$$z' \neq 0 \text{ حيث } \left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad -8$$

$$z \neq 0 \text{ مع } \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}} \quad -9$$

نشاط :

ليكن p كثير حدود للمتغير المركب z معرف كمايلي $p(z) = z^3 + z^2 - 2$

$$1 - \text{ أثبت أن : } \overline{p(z)} = p(\bar{z})$$

$$2 - \text{ أحسب } p(1) \text{ و } p(-1-i) \text{ ماذا تستنتج ؟}$$

$$3 - \text{ استنتج الجذر الآخر لكثير الحدود } p$$

الحل :

$$1 \quad \overline{p(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 - 2 = p(\bar{z}) \quad -1$$

$$2 \quad p(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0 \quad -2$$

$$\begin{aligned} p(-1-i) &= (-1-i)^3 + (-1-i)^2 - 2 \\ &= (-1-i)^2 [-1-i+1] - 2 \\ &= (1+2i-1)(-i) - 2 \\ &= 2i(-i) - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

نتيجة : الأعداد 1 و $(-1-i)$ هي جذور لكثير الحدود p

$$3 - \text{ حسب السؤال (1) فإن : } \overline{p(\bar{z})} = p(z)$$

$$\text{إذن : } p(\overline{-1-i}) = \overline{p(-1-i)}$$

$$\text{حيث : } p(-1-i) = 0$$

$$\text{منه : } p(-1+i) = 0$$

إذن : الجذر الآخر لـ p هو $-1+i$

طويلة عدد مركب

تعريف : z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + iy$ نسمي طويلة z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ $|z|$ و المعروف بـ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{أمثلة : } \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$$

$$|1-i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|3i| = \sqrt{0 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

حالات خاصة : إذا كان $z = 0$ فإن $|z| = 0$

إذا كان z عدد حقيقي فإن طويلة z هي القيمة المطلقة لـ z

إذا كان z عدد تخيلي صرف فإن طويلة z هي القيمة المطلقة لجزؤه التخيلي

خواص : z و z' عددين مركبين . لدينا الخواص التالية :

$$1 \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$2 \quad |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$3 \quad |-z| = |z|$$

$$4 \quad \text{مع } z' \neq 0 : \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$5 \quad \text{مع } n \in \mathbb{N}^* : |z^n| = |z|^n$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{حذر !}$$

عمدة عدد مركب غير معدوم

تعريف : $z = x + iy$ عدد مركب غير معدوم يكتب على شكله الجبري

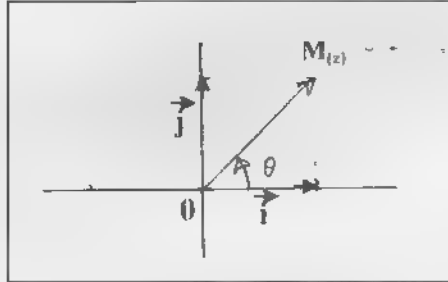
في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ نعتبر النقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z .

كل قياس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OI}; \vec{OM})$ يسمى عمدة العدد المركب z و نرمز له بـ $\text{Arg}(z)$

نتيجة : إذا كان θ هو عمدة للعدد المركب z فإن كل عدد حقيقي من الشكل $\theta + 2\pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

هو أيضا عمدة للعدد المركب z

مثلا : لنمثل العدد $z = 1 + i$



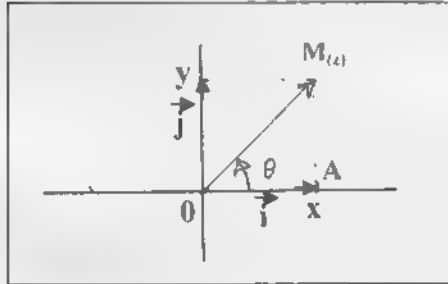
$$(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{لاحظ ان}$$

$$\text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{إذن :}$$

البحث عن عمدة عدد مركب

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ نعتبر العدد المركب $z = x + iy$ لاحقة للنقطة M

في المثلث القائم OAM لدينا :



$$\begin{cases} OM^2 = OA^2 + MA^2 \\ \cos \theta = \frac{x}{OM} \\ \sin \theta = \frac{y}{OM} \end{cases}$$

$$\begin{cases} OM^2 = x^2 + y^2 \\ \cos \theta = \frac{x}{OM} \\ \sin \theta = \frac{y}{OM} \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= |z| \\ \cos \theta &= \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta &= \frac{y}{|z|} \end{aligned} \right\} \quad \text{لكن} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta &= \frac{y}{|z|} \end{aligned} \right\}$$

نتيجة : عمدة العدد المركب z حيث $z = x + iy$ هي العدد الحقيقي θ الذي يحقق :

أمثلة : عين عمدة العدد المركب $z = 1 - \sqrt{3}i$

الحل : ليكن $\text{Arg}(z) = \theta$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1+3}} \\ \sin \theta &= \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{|z|} \\ \sin \theta &= \frac{-\sqrt{3}}{|z|} \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي}$$

$$\text{منه : } \theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

z و z' عددان مركبان غير معدومان .

$$\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \quad - 1$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') \quad - 2$$

$$\text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z) \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N}^* \quad - 3$$

نتيجة : الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

إذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث طويلته $|z| = \rho$ و عمدته $\text{Arg}(z) = \theta$ فإن كتابة z من الشكل $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z

مثال :

$$z = 1 - i$$

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad \text{و ليكن } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad : \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$z = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{هو } z \text{ الشكل المثلثي لـ } z$$

تطبيق :

أكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي (باستعمال خواص الطويلة و العمدة)

$$z = (1+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{6}) \quad - 3 \quad z = 1+i \quad - 1$$

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}} \quad - 4 \quad z = \sqrt{2}-i\sqrt{6} \quad - 2$$

الحل :

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad - 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{و ليكن } \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad : \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$1+i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{نتيجة :}$$

$$|\sqrt{2}-i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad - 2$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \quad \text{و ليكن } \theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{منه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{2}-i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] \quad \text{نتيجة :}$$

$$|(1+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{6})| = |1+i| \times |\sqrt{2}-i\sqrt{6}| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4 \quad - 3$$

$$\text{Arg}((1+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{6})) = \text{Arg}(1+i) + \text{Arg}(\sqrt{2}-i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}$$

$$(1+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{6}) = 4 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right] \quad \text{نتيجة :}$$

$$\left| \frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}} \right| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{2}-i\sqrt{6}|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad - 4$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}\right) = \text{Arg}(1+i) - \text{Arg}(\sqrt{2}-i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

نتيجة : $\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right]$

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم

تعريف : العدد المركب الذي طويلته 1 و عمده θ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ يكتب على الشكل الأسّي كمايلي $e^{i\theta}$ حيث $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ هذا الترميز يسمى ترميز أولر

تعميم : إذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث $|z| = \ell$ و $\text{Arg}(z) = \theta$ فإن

$$z = \ell e^{i\theta}$$

ملاحظة : الشكل الأسّي لعدد مركب يحتفظ بخواص الدالة الأسية كمايلي :

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\theta)}$$

دستور موافر

ليكن z عدد مركب حيث $|z| = \ell$ و $\text{Arg}(z) = \theta$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$z^n = (\ell e^{i\theta})^n = \ell^n \times e^{in\theta} = \ell^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$[\ell(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = \ell^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \quad \text{إذن :}$$

نشاط :

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$5e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad 8e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

الحل :

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] = 2 \left[\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 1 + i\sqrt{3}$$

$$8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = 8 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = 5[0 + i] = 5i$$

نشاط عكسي :

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسّي :

$$(1-i)^8 \quad ; \quad -3-3i \quad ; \quad -7i$$

الحل :

$$\begin{cases} | -7i | = 7 \\ \cos \theta = \frac{0}{7} = 0 \\ \sin \theta = \frac{-7}{7} = -1 \end{cases} \quad \text{إذن : } \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ و } \theta = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-7i = 7 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 7e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{نتيجة :}$$

$$|-3-3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{إذن : } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ و } \theta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$-3-3i = 3\sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right] = 3\sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i} \quad \text{نتيجة :}$$

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ و ليس } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \text{ نتيجة :}$$

$$(1 - i)^8 = \left[\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right]^8 = 16 e^{-2\pi i} \text{ منه}$$

البحث عن الجذران التربيعيان لعدد مركب على شكلهما الجبري :

ليكن $z = x + iy$ عدد مركب يكتب على شكله الجبري

نريد تعيين العدد المركب w على شكله الجبري $w = \alpha + i\beta$ حيث $w^2 = z$ لذلك نتبع الخطوات التالية :

$$w^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \quad -1$$

$$|w^2| = |w|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad -2$$

$$\left. \begin{aligned} |w^2| &= |z| \\ \operatorname{Re}(w^2) &= \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(w^2) &= \operatorname{Im}(z) \end{aligned} \right\} \text{ فإن } w^2 = z \text{ إذا كان } \left. \begin{aligned} (1) \dots\dots\dots \alpha^2 + \beta^2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ (2) \dots\dots\dots \alpha^2 - \beta^2 &= x \\ (3) \dots\dots\dots 2\alpha\beta &= y \end{aligned} \right\} \text{ أي}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2\alpha^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\alpha^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \text{ منه :}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \text{ إذن : يكفي أن يكون}$$

$$2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \beta = y : (3) \text{ نعوض } \alpha \text{ في المساواة (3) :}$$

$$\alpha \neq 0 \text{ مع } \beta = \frac{y}{2\alpha} \text{ أي } \beta = \frac{y}{2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}} \text{ إذن :}$$

$$w = \sqrt{\frac{x + |z|}{2}} + i \frac{y}{2\sqrt{\frac{x + |z|}{2}}} \text{ نتيجة : أحد الجذور التربيعية للعدد المركب } z = x + iy \text{ هو العدد}$$

$$x + \sqrt{|z|} \neq 0 \text{ حيث}$$

ملاحظة : للحصول على الجذر الآخر يكفي أن نأخذ $(-w)$

مثال : عين الجذر التربيعي للعدد $-8 + 6i$

الحل : ليكن $(\alpha + i\beta)^2 = -8 + 6i$

$$\alpha = \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 + 36}}{2}} = \sqrt{\frac{-8 + 10}{2}} = 1 \text{ إذن :}$$

$$\beta = \frac{6}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3 \text{ منه :}$$

$$(1 + 3i)^2 = -8 + 6i \text{ أي } \alpha + i\beta = 1 + 3i \text{ نتيجة :}$$

$$-(1 + 3i) = -1 - 3i \text{ و الجذر الآخر :}$$

البحث عن حلول معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول مركب z

لتكن المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ (1) ذات المجهول المركب z حيث a, b, c أعداد مركبة معلومة حيث $a \neq 0$

المعادلة (1) دائما تقبل حولا في مجموعة الأعداد المركبة C كمايلي :

$$1 - \text{نحسب المميز } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$2 - \text{إذا كان } \Delta = 0 \text{ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا } z_0 = -\frac{b}{2a}$$

3 - إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متميزين z_1 و z_2 حيث $z_2 = \frac{-b+w}{2a}$ و $z_1 = \frac{-b-w}{2a}$ و w هو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب Δ

مثال: حل في C المعادلة: $z^2 + (3-2i)z + 5-5i = 0$ (1)

الحل: $\Delta = (3-2i)^2 - 4(1)(5-5i)$

$$= 9 - 12i - 4(5 - 5i)$$

$$= 9 - 12i - 20 + 20i$$

$$= -15 + 8i$$

$$= (\alpha + i\beta)^2$$

لنبحث عن α و β كمايلي:

$$|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 8/2 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{-15+17}{2}} \\ \beta = \frac{8}{2\alpha} \end{array} \right\} \text{ منه:}$$

نتيجة: أحد الجذور التربيعية للعدد المركب Δ هو: $1+4i$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \frac{-(3-2i) - (1+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i \\ z_2 = \frac{-(3-2i) + (1+4i)}{2} = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i \end{array} \right\} \text{ منه: حلول المعادلة (1) هي:}$$

البحث عن الشكل المركب لتحويل نقطي مألوف

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$N(x; y)$ و $N'(x'; y')$ نقطتان من المستوي لاحقاًهما على الترتيب z و z'

1 - الانسحاب: ليكن $\vec{u} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي.

T هو الانسحاب للمستوي ذو الشعاع \vec{u} يحول النقطة N إلى N'
إذن: $\vec{NN'} = \vec{u}$

$$\text{منه: } z' - z = \alpha + i\beta$$

أي: $z' = z + \alpha + i\beta$ وهي العبارة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه \vec{u}

خواص: الانسحاب هو تحويل تقابلي للمستوي و تحويله العكسي هو الإنسحاب ذو الشعاع $-\vec{u}$ الذي لاحقه $-\alpha - i\beta$ إذن عبارته $z' = z - \alpha - i\beta$

2- التحاكي: لتكن $W(\alpha; \beta)$ نقطة ثابتة من المستوي و k عدد حقيقي غير معدوم

h هو التحاكي للمستوي مركزه W ونسبته k و يحول N إلى N'

$$\text{إذن: } \vec{WN'} = k \vec{WN}$$

$$\text{منه: } z' - (\alpha + i\beta) = k[z - (\alpha + i\beta)]$$

$$\text{منه: } z' = k z + (\alpha + i\beta)(1 - k) \text{ هي عبارة التحاكي h}$$

3- الدوران: لتكن $w(\alpha; \beta)$ نقطة ثابتة من المستوي و θ عدد حقيقي

R هو الدوران للمستوي مركزه W وزاويته θ و يحول النقطة N إلى N'

$$\left. \begin{array}{l} (WN; WN') = \theta \\ \|\vec{WN'}\| = \|\vec{WN}\| \end{array} \right\} \text{ إذن:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Arg}(z' - (\alpha + i\beta)) - \text{Arg}(z - (\alpha + i\beta)) = \theta \\ |z' - (\alpha + i\beta)| = |z - (\alpha + i\beta)| \end{array} \right\} \text{ منه:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Arg} \left(\frac{z' - (\alpha + i\beta)}{z - (\alpha + i\beta)} \right) = \theta \\ \left| \frac{z' - (\alpha + i\beta)}{z - (\alpha + i\beta)} \right| = 1 \end{array} \right\} \text{ إذن:}$$

$$\frac{Z' - (\alpha + i\beta)}{Z - (\alpha + i\beta)} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{إذن :}$$

$$Z' - (\alpha + i\beta) = (\cos \theta + i \sin \theta)[Z - (\alpha + i\beta)] \quad \text{أي :}$$

$$\text{إذن : } Z' = (\cos \theta + i \sin \theta) Z + (\alpha + i\beta)[1 - (\cos \theta + i \sin \theta)] \quad \text{دراسة الحالة العامة :}$$

ليكن f التحويل القطبي للمستوي و الذي يحول النقطة N ذات اللاحقة z إلى النقطة N' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$. نميز الحالات التالية :

$$1 - \text{إذا كان } a = 1 \text{ فإن } f \text{ هو الإسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة } b$$

$$2 - \text{إذا كان } a \in \mathbb{R}^* - \{1\} \text{ فإن } f \text{ هو التحاكي الذي مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة } \frac{b}{1-a} \text{ و النسبة } a$$

$$3 - \text{إذا كان } a \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \text{ حيث } |a| = 1 \text{ فإن } f \text{ هو الدوران الذي مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة } \frac{b}{1-a} \text{ و الزاوية } \theta \text{ حيث } \theta = \text{Arg}(a)$$

مثال (1) : المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$

$$t \text{ هو الإسحاب الذي شعاعه } \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 - \text{عين العبارة المركبة للإسحاب } t$$

$$2 - A \text{ نقطة لاحقتها } 3-i. \text{ عين لاحقة النقطة } A' \text{ صورة } A \text{ بالإسحاب } t$$

الحل :

$$1 - \text{لتكن } M \text{ نقطة لاحقتها } z \text{ و } M' \text{ نقطة لاحقتها } z'$$

$$M' \text{ صورة } M \text{ بـ } t \text{ إذا و فقط إذا كان } z' = z + (-2 + i) \text{ و هي عبارة الإسحاب } t$$

$$2 - \text{من أجل } z = 3 - i \text{ فإن : } z' = 3 - i - 2 + i = 1$$

$$\text{إذن : لاحقة النقطة } A' \text{ هي } 1 \text{ أي } A'(1; 0)$$

مثال (2) : h تحاكي للمستوي مركزه A ذات اللاحقة $-1+2i$ و نسبته 3

عين العبارة المركبة لـ h ثم لاحقة صورة النقطة B حيث B هي النقطة التي لاحقتها $-3-2i$

$$\text{الحل : لتكن } z' = az + b \text{ عبارة التحاكي .}$$

$$\text{النسبة هي } 3 \text{ إذن : } a = 3$$

$$\text{لاحقة المركز هي } -1+2i \text{ إذن : } \frac{b}{1-a} = -1+2i \text{ أي } b = (1-3)(-1+2i)$$

$$\text{منه : } b = 2-4i$$

$$\text{إذن : عبارة التحاكي } h \text{ هي : } z' = 3z + 2 - 4i$$

$$\text{من أجل } z = -3-2i \text{ فإن } z' = 3(-3-2i) + 2 - 4i$$

$$\text{أي : } z' = -7-10i \text{ و هي لاحقة صورة } B$$

$$\text{مثال (3) : عين العبارة المركبة للدوران الذي مركزه } A \text{ ذات اللاحقة } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و زاويته } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{الحل : لتكن } z' = az + b \text{ عبارة الدوران}$$

$$\text{زاوية الدوران هي } \frac{\pi}{3} \text{ إذن : } a = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{منه : } a = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لاحقة مركز الدوران هي } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ إذن : } \frac{b}{1-a} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{أي : } \frac{b}{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{منه : } b = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\text{أي : } b = -\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \quad \text{أي : } b = -1$$

نتيجة : عبارة الدوران هي : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 1$

حل معادلات من الدرجة الرابعة (مضاعفة التريبع)

لحل المعادلة $az^4 + bz^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) في C نضع $z^2 = t$ ثم نحل المعادلة $at^2 + bt + c = 0$ ذات المجهول المركب t و لتكن t_1 و t_2 هذه الحلول (يمكن أن يكون $t_1 = t_2$)

إذن : حلول المعادلة $az^4 + bz^2 + c = 0$ هي الجذور التربيعية للعدين t_1 و t_2
حل معادلات من الدرجة الثالثة :

لحل المعادلة $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($a \neq 0$) في C نبحث عن أحد حلولها الخاصة (حل حقيقي ، حل تخيلي صرف أو حلان مترافقان) ثم بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على الحلول الأخرى .

الجذور النونية لعدد مركب على شكله المثلثي

ليكن z عدد مركب على شكله المثلثي $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $R > 0$
 n عدد طبيعي أكبر تماماً من 1

كل عدد مركب w يحقق $w^n = z$ هو جذر نوني للعدد z

لنبحث عن w على شكله المثلثي نضع $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

إذن : $w^n = z$ يكافئ $[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = R(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\left. \begin{aligned} r^n &= R \\ n\alpha &= \theta + 2\pi k \end{aligned} \right\} \text{يكافئ} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt[n]{R} \\ \alpha &= \frac{1}{n}\theta + \frac{2\pi}{n}k \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

ملاحظة : كل عدد مركب له n جذر نوني مختلف ($n > 1$)

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل تمارين هذا المحور نعتبر المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

التمرين 1 -

عين $\text{Re}(z)$ و $\text{Im}(z)$ ثم $|z|$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$z = i - 3\sqrt{2} \quad -4 \quad z = 3 + 2i \quad -1$$

$$z = \sqrt{5} - \sqrt{7} \quad -5 \quad z = -1 + 3i \quad -2$$

$$z = -i\sqrt{3} \quad -6 \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -3$$

الحل 1 -

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$	$ z $
$3 + 2i$	3	2	$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$-1 + 3i$	-1	3	$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\left -\frac{\sqrt{3}}{3} \right = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (حقيقي)
$i - 3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	1	$\sqrt{9 \times 2 + 1} = \sqrt{19}$
$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	0	$ \sqrt{5} - \sqrt{7} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ (حقيقي)
$-i\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$ - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ (تخيلي)

التمرين 2 -

$z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$ عدد مركب حيث

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما .

الحل 2 -

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = 0 \end{array} \right\} z \text{ معدوم إذا و فقط إذا كان}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \{0; -1\} \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

من أجل $x = 0$: $y - 1 = 0$ إذن : $y = 1$

من أجل $x = -1$: $1 + y - 1 = 0$ إذن : $y = 0$

نتيجة : $(x; y) \in \{(0; 1); (-1; 0)\}$

التمرين 3 -

1 - عين إحداثيات النقطة D ذات اللاحقة $\sqrt{3} + 3i$

2 - عين لوائح النقط A ؛ B ؛ C حيث $A(\sqrt{3}; 1)$ ؛ $B(0; 2)$ ؛ $C(-\sqrt{3}; -1)$

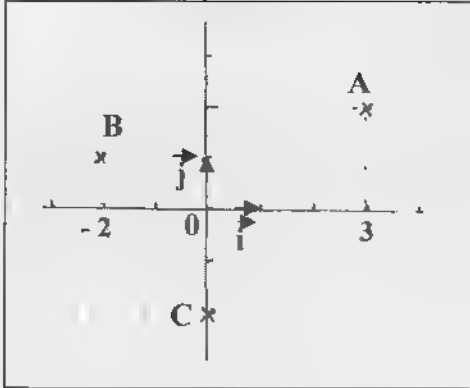
الحل 3 -

1 - إحداثيات النقطة D هما $(\sqrt{3}; 3)$

- 2 - لاحقة النقطة A هي العدد المركب $\sqrt{3} + i$
 لاحقة النقطة B هي العدد المركب $2i$
 لاحقة النقطة C هي العدد المركب $-\sqrt{3} - i$

التمرين - 4

اليك الشكل المقابل .



ليكن z عدد مركب نضع $z' = 3 + iz$

اكتب العدد z' على شكله الجبري في كل حالة من الحالات التالية :

1 - z هو لاحقة النقطة A

2 - z هو لاحقة النقطة B

3 - z هو لاحقة النقطة C

الحل - 4

1 - z هو لاحقة النقطة A إذن : $z = 3 + 2i$

منه : $z' = 3 + i(3 + 2i)$

أي : $z' = 3 + 3i - 2$

أي : $z' = 1 + 3i$

2 - z هو لاحقة النقطة B إذن : $z = -2 + i$

منه : $z' = 3 + i(-2 + i)$

أي : $z' = 3 - 2i - 1$

أي : $z' = 2 - 2i$

3 - z هو لاحقة النقطة C إذن : $z = -2i$

منه : $z' = 3 + i(-2i)$

أي : $z' = 3 + 2$

أي : $z' = 5$

التمرين - 5

A نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $a = -1 + 2i$

عين العدد المركب z حيث تكون صورته النقطة M نظيرة A بالنسبة إلى :

(أ) مبدأ المعلم

(ب) حامل محور الفواصل

(ج) حامل محور الترتيب

(د) المنصف الأول .

الحل - 5

$a = -1 + 2i$ لاحقة النقطة A إذن : $A(-1; 2)$

(أ) نظيرة A بالنسبة إلى مبدأ المعلم إذن $M(1; -2)$ منه $z = 1 - 2i$

(ب) نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن $M(-1; -2)$ منه $z = -1 - 2i$

(ج) نظيرة A بالنسبة إلى محور الترتيب إذن $M(1; 2)$ منه $z = 1 + 2i$

(د) نظيرة A بالنسبة إلى المنصف الأول إذن $M(2; -1)$ منه $z = 2 - i$

التمرين - 6

أعط مرافق كل من الأعداد المركبة التالية :

$$2 + 4i ; 3 - i ; i\sqrt{2} - 3 ; -\frac{5}{2}i$$

الحل - 6

$$\overline{2 + 4i} = 2 - 4i ; \overline{3 - i} = 3 + i ; \overline{i\sqrt{2} - 3} = -i\sqrt{2} - 3 ; \overline{-\frac{5}{2}i} = \frac{5}{2}i$$

التمرين - 7

z عدد مركب حيث $z = 3 + 4i$. أحسب $z \times \bar{z}$ ثم اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{i}{z}$

الحل - 7

$$z \times \bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{i\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{i(3 - 4i)}{25} = \frac{3i + 4}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

التمرين 8z عدد مركب حيث $z = 2 + i$

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{\bar{z}} \quad ; \quad \frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{\bar{z}} \quad ; \quad \frac{1}{z} + \frac{i}{\bar{z}}$$

الحل 8

لدينا :

$$z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 4 + 1 = 5$$

$$\frac{1}{z} + \frac{i}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} + iz}{z\bar{z}} = \frac{2-i + i(2+i)}{5} = \frac{2-i+2i-1}{5} = \frac{1+i}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{\bar{z}} &= \frac{\bar{z}(1+2i) - z(3-i)}{z\bar{z}} \\ &= \frac{(2-i)(1+2i) - (2+i)(3-i)}{5} \\ &= \frac{2+4i-i+2-6+2i-3i-1}{5} \\ &= \frac{-3+2i}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{\bar{z}} = \frac{(1+3i)(3-2i)}{z\bar{z}} = \frac{3-2i+9i+6}{5} = \frac{9+7i}{5}$$

التمرين 9

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1}{3i-5} \quad ; \quad \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1}{1-i} \quad ; \quad \frac{1}{i}$$

الحل 9

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{3+i\sqrt{2}} = \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \times \frac{3-i\sqrt{2}}{3-i\sqrt{2}} = \frac{3-i\sqrt{2}}{9+2} = \frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}i$$

$$\frac{1}{3i-5} = \frac{1}{-5+3i} \times \frac{-5-3i}{-5-3i} = \frac{-5-3i}{25+9} = \frac{-5}{34} - \frac{3}{34}i$$

التمرين 10

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1+i}{1-i} \quad ; \quad \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{5+15i}{1+2i} \quad ; \quad \frac{4-6i}{3+2i}$$

الحل 10

$$\frac{4-6i}{3+2i} = \frac{4-6i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{12-8i-18i-12}{9+4} = \frac{-26i}{13} = -2i$$

$$\frac{5+15i}{1+2i} = \frac{5+15i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5-10i+15i+30}{1+4} = \frac{35+5i}{5} = 7+i$$

$$\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \times \frac{3+i\sqrt{2}}{3+i\sqrt{2}} = \frac{3+i\sqrt{2}+3i-\sqrt{2}}{9+2} = \frac{3-\sqrt{2}}{11} + i\left(\frac{3+\sqrt{2}}{11}\right)$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

التمرين 11

أكتب مرافق كل من الأعداد المركبة التالية على شكله الجبري :

$$\frac{3-i}{1+i} ; (1+2i)^3 ; (1-i)(2+i)$$

الحل - 11

يمكن حل هذا التمرين بطريقتين مختلفتين كمايلي :

أولاً : إما نكتب هذه الأعداد على شكلها الجبري ثم نبحت عن مرافقها .
ثانياً : أو نستعمل خواص المرافق و نحسب في نفس الوقت .

مثلاً : لنبحث عن مرافق العدد $(1-i)(2+i)$ الطريقة الأولى : $(1-i)(2+i) = 2+i-2i+1 = 3-i$ إذن : $\overline{(1-i)(2+i)} = \overline{3-i} = 3+i$ الطريقة الثانية : $(1-i)(2+i) = (1-i) \times (2+i) = (1+i)(2-i) = 2-i+2i+1 = 3+i$

إذن : نختار الطريقة الثانية لحل باقي التمرين كمايلي :

$$\begin{aligned}\overline{(1+2i)^3} &= \overline{((1+2i))^3} \\ &= \overline{(1+2i)^2 \times (1+2i)} \\ &= \overline{(1-4i-4)(1+2i)} \\ &= \overline{(-3-4i)(1+2i)} \\ &= \overline{-3+6i-4i-8} \\ &= \overline{-11+2i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} &= \frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}} \\ &= \frac{3+i}{1-i} \\ &= \frac{1+i}{1+i} \times \frac{3+i}{1-i} \\ &= \frac{3+3i+i-1}{1+1} \\ &= \frac{2+4i}{2} \\ &= 1+2i\end{aligned}$$

التمرين - 12

اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي θ فإن :

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

الحل - 12

ليكن θ عدد حقيقي .

$$\begin{aligned}\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} &= \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \times \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{لأن } (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \quad \text{حسب موافق .}$$

التمرين - 13

$$z_2 = \frac{3+i}{2-5i} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{3-i}{2+5i} \quad \text{ليكن}$$

1 - برر دون حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و أن $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف2 - أحسب $z_1 + z_2$ ثم $z_1 - z_2$ ثم إستنتج الشكل الجبري لـ z_1

الحل - 13

1 - يكون عدد مركب z حقيقي إذا و فقط إذا كان $z = \bar{z}$ يكون عدد مركب z تخيلي إذا و فقط إذا كان $z = -\bar{z}$

لنستعمل هذه الخواص في السؤال كمايلي :

$$z_1 + z_2 = \frac{3-i}{2+5i} + \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \left(\frac{3-i}{2+5i} \right) + \left(\frac{3+i}{2-5i} \right) = \frac{3+i}{2-5i} + \frac{3-i}{2+5i}$$

نتيجة : $z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}$ إذن : $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي .

$$z_1 - z_2 = \frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{3+i}{2-5i} - \frac{3-i}{2+5i} = - \left(\frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i} \right) = - (z_1 - z_2)$$

نتيجة : $\overline{z_1 - z_2} = - (z_1 - z_2)$ إذن : $z_1 - z_2$ تخيلي صرف .

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{(3-i)(2-5i) + (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6-15i-2i-5+6+15i+2i-5}{4+25} \\ &= \frac{2}{29} \end{aligned} \quad -2$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \frac{(3-i)(2-5i) - (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6-15i-2i-5-6-15i-2i+5}{4+25} \\ &= \frac{-34}{29} i \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{2}{29} \\ z_1 - z_2 &= \frac{-34}{29} i \end{aligned} \right\} \text{نتيجة :}$$

$$2z_1 = \frac{2}{29} - \frac{34}{29} i \quad \text{منه بالجمع}$$

$$z_1 = \frac{1}{29} - \frac{17}{29} i \quad \text{إذن :}$$

التمرين - 14

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

$$(1-i)z = 3+i \quad -1$$

$$3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i \quad -2$$

$$(3-4i)z^2 = iz \quad -3$$

$$\frac{z+1}{z-1} = 2i \quad -4$$

الحل - 14

$$z = \frac{3+i}{1-i} \quad \text{إذن : } (1-i)z = 3+i \quad -1$$

$$z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{3+3i+i-1}{1+1} \quad \text{أي}$$

$$z = 1+2i \quad \text{أي}$$

$$z[3-(1+i)] = 2-i-1-2i \quad \text{إذن : } 3z-2+i = (1+i)z-1-2i \quad -2$$

$$(2-i)z = 1-3i \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{1-3i}{2-i} \quad \text{أي}$$

لنستعمل هذه الخواص في السؤال كمايلي :

$$z_1 + z_2 = \frac{3-i}{2+5i} + \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \left(\frac{3-i}{2+5i} \right) + \left(\frac{3+i}{2-5i} \right) = \frac{3-i}{2-5i} + \frac{3+i}{2+5i}$$

نتيجة : $z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}$ إذن : $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي .

$$z_1 - z_2 = \frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{3+i}{2-5i} - \frac{3-i}{2+5i} = - \left(\frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i} \right) = - (z_1 - z_2)$$

نتيجة : $z_1 - z_2 = - \overline{(z_1 - z_2)}$ إذن : $z_1 - z_2$ تخيلي صرف .

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{(3-i)(2-5i) + (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6-15i-2i-5+6+15i+2i-5}{4+25} \\ &= \frac{2}{29} \end{aligned} \quad -2$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \frac{(3-i)(2-5i) - (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6-15i-2i-5-6-15i-2i+5}{4+25} \\ &= \frac{-34}{29} i \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{2}{29} \\ z_1 - z_2 &= \frac{-34}{29} i \end{aligned} \right\} \text{نتيجة : منه بالجمع}$$

$$z_1 = \frac{1}{29} - \frac{17}{29} i \quad \text{إذن}$$

التمرين 14

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

$$(1-i)z = 3+i \quad -1$$

$$3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i \quad -2$$

$$(3-4i)z^2 = iz \quad -3$$

$$\frac{z+1}{z-1} = 2i \quad -4$$

الحل 14

$$(1-i)z = 3+i \quad \text{إذن} \quad -1$$

$$z = \frac{3+i}{1-i}$$

$$z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{3+3i+i-1}{1+1} \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{1+2i}{2} \quad \text{أي}$$

$$z[3-(1+i)] = 2-i-1-2i \quad \text{إذن} \quad 3z-2+i = (1+i)z-1-2i \quad -2$$

$$(2-i)z = 1-3i \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{1-3i}{2-i} \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{1-3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} \quad \text{منه}$$

$$z = \frac{2+i}{4+1} \frac{6i+3}{1} \quad \text{أي}$$

$$z = 1-i \quad \text{أي}$$

$$(3-4i)z^2 - iz = 0 \quad \text{إذن : } (3-4i)z^2 = iz \quad -3$$

$$z[(3-4i)z - i] = 0 \quad \text{منه}$$

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ \text{أو} \\ (3-4i)z - i = 0 \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{i}{3-4i} \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} \end{array} \right\} \text{منه}$$

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{3i-4}{9+16} \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ \text{أو} \\ z = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} z-1 \neq 0 \\ 2i(z-1) = z+1 \end{array} \right\} \text{تكافئ} \quad \frac{z+1}{z-1} = 2i \quad -4$$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 1 \\ 2iz - 2i - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 1 \\ z(2i-1) = 1+2i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{1+2i}{2i-1} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{1+2i}{2i-1} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{-1-2i-2i+4}{1+4} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \quad \text{تكافئ}$$

التمرين 15

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $2\bar{z} = -1+i$

الحل 15

$$\bar{z} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{تكافئ} \quad 2\bar{z} = -1+i$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{منه}$$

التمرين - 16

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

$$(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0 \quad -1$$

$$\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i \quad -2$$

الحل - 16

$$\left. \begin{array}{l} 2z + 1 - i = 0 \\ \text{أو} \\ i\bar{z} + i - 2 = 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ } (2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0 \quad -1$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{-1+i}{2} \\ \text{أو} \\ \bar{z} = \frac{2-i}{i} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \text{أو} \\ \bar{z} = \frac{2-i}{i} \times \frac{-i}{-i} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \text{أو} \\ \bar{z} = \frac{-2i-1}{1} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \text{أو} \\ \bar{z} = -1 - 2i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \text{أو} \\ z = -1 + 2i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} + 1 \neq 0 \\ i(\bar{z} + 1) = \bar{z} - 1 \end{array} \right\} \text{تكافئ } \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i \quad -2$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z}(i - 1) = -1 - i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = \frac{-1-i}{i-1} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = \frac{-1-i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = \frac{1+2i-1}{1+1} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = i \\ z = -i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

التمرين - 17

أكتب بدلالة \bar{z} مرافق كل من الأعداد المركبة التالية :

$$z^3 - iz^2 + 3z - 3i \quad ; \quad \frac{2+iz}{z+2} \quad ; \quad (2+iz)(1+4z) \quad ; \quad 2+3iz$$

الحل - 17

$$\overline{2+3iz} = 2-3iz$$

$$(2+iz)(1+4z) = (2-i\bar{z})(1+4\bar{z})$$

$$\left(\frac{2+iz}{z+2}\right) = \frac{2-iz}{\bar{z}+2}$$

$$z^3 - iz^2 + 3z - 3i = (\bar{z})^3 + i(\bar{z})^2 + 3\bar{z} + 3i$$

التمرين - 18

M نقطة من المستوي المركب لاحتفتها العدد المركب z
عين مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون العدد $z + \frac{1}{z}$ حقيقيا .

الحل - 18

ليكن $z = x + iy$

$$\left. \begin{array}{l} z \neq 0 \\ \frac{z^2 + 1}{z} \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{حقيقي يكافئ } z + \frac{1}{z}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ \frac{(x+iy)^2 + 1}{x+iy} \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ \text{حقيقي } \frac{(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ \text{حقيقي } \frac{x(x^2 - y^2 + 1) - y(x^2 - y^2 + 1)i + 2x^2yi + 2xy^2}{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ \text{حقيقي } \frac{x^3 - xy^2 + x + 2xy^2}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2y - x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2} i \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ 2x^2y - x^2y + y^3 - y = 0 \text{ (الجزء التخيلي معدوم)} \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ x^2y + y^3 - y = 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x; y) \neq (0; 0) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ أو } y = 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M المطلوبة هي اتحاد المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) و نطق الدائرة التي معادلته $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها 1) باستثناء المبدأ ذو الإحداثيات $(0; 0)$ لأن $(x; y) \neq (0; 0)$

التمرين - 19

A ، B ، C ، D اربع نطق من المستوي المركب لواقعها على الترتيب $-1+4i$ ، $-2+i$ ، $3+2i$ و $2-i$
برهن أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع

الحل - 19

يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

إذن : يكفي أن نثبت أن لاحتفتي الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{DC} متساويتين .

لاحقة $\overrightarrow{AB} : (-1+4i) - (-2+i) = -1+4i+2-i = 1+3i$
 لاحقة $\overrightarrow{DC} : (3+2i) - (2-i) = 3+2i-2+i = 1+3i$
 نتيجة : \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{DC} لهما نفس اللاحقة إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 منه : ABCD متوازي أضلاع

التمرين - 20

z_A, z_B, z_C هي لواحق النقط $A(\sqrt{3}; 1), B(-\sqrt{3}; -1), C(0; 2)$ على الترتيب . عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

الحل - 20

ABCD متوازي أضلاع يكافئ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 يكافئ : $z_B - z_A = z_C - z_D$
 يكافئ : $z_D = z_C - z_B + z_A$
 يكافئ : $z_D = 0 + 2i - \sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i$
 يكافئ : $z_D = 2\sqrt{3} + 4i$

التمرين - 21

A , B , C نقط لواحدها على الترتيب $3+2i, -1+3i, -2-2i$

1 - عين لاحقة النقطة I منتصف القطعة [AB]

2 - عين لاحقة المرجح G للجملة $\{(A; 2); (B; -3); (C; 5)\}$

الحل - 21

لتكن z_A, z_B, z_C لواحق النقط A , B , C على الترتيب

1 - لاحقة منتصف [AB] هي $\frac{z_A + z_B}{2}$ أي $\frac{3+2i-1+3i}{2}$

منه : لاحقة النقطة I هي $1 + \frac{5}{2}i$

2 - لاحقة المرجح G هي : $\frac{2z_A - 3z_B + 5z_C}{2-3+5}$

إذن لاحقة G هي : $z_G = \frac{2(3+2i) - 3(-1+3i) + 5(-2-2i)}{2-3+5}$

أي $z_G = \frac{6+4i+3-9i-10-10i}{4}$
 منه : $z_G = -\frac{1}{4} - \frac{15}{4}i$

التمرين - 22

A , B , C ثلاث نقط من المستوي لواحدها على الترتيب $2+i, 2-i, i$

عين لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD

الحل - 22

لتكن z_A, z_B, z_C, z_D لواحق النقط A , B , C , D على الترتيب

لاحقة مركز ثقل المثلث DCB هي $\frac{1}{3}(z_D + z_C + z_B)$

إذن : تكون A مركز ثقل المثلث DCB إذا وفقط إذا كان $z_A = \frac{1}{3}(z_D + z_C + z_B)$

أي : $3z_A = z_D + z_C + z_B$

أي : $z_D = 3z_A - z_C - z_B$

منه : $z_D = 3(2+i) - (i) - (2-i)$

منه : $z_D = 4 + 3i$

التمرين - 23

من أجل كل عدد مركب z نضع $f(z) = z^2 - z$ حيث $z = x + iy$ (مع x و y عدنان حقيقيان)

$\left. \begin{aligned} \text{Re}(f(z)) &= x^2 - y^2 - x \\ \text{Im}(f(z)) &= y(2x - 1) \end{aligned} \right\}$ برهن أن

الحل - 23

$$f(z) - z^2 - z = (x + iy)^2 - (x + iy) - (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y)$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 - x \\ \operatorname{Im}(f(z)) = 2xy - y - y(2x - 1) \end{cases}$$

إذن :

التمرين - 24

z_C ، z_B ، z_A هي على الترتيب لواحظ النقط $A(\sqrt{3}; 1)$ ، $B(-\sqrt{3}; -1)$ ، $C(2; 0)$

1 - أحسب $|z_C|$ ، $|z_B|$ ، $|z_A|$ ماذا تستنتج ؟

الحل - 24

$$|z_C| = \sqrt{4 + 0} = 2 \quad ; \quad |z_B| = \sqrt{3 + 1} = 2 \quad ; \quad |z_A| = \sqrt{3 + 1} = 2 \quad - 1$$

إذن : النقط A ، B ، C تبعد بنفس المسافة 2 عن المبدأ .

منه : A ، B ، C هي نقط من الدائرة التي مركزها $O(0; 0)$ و نصف قطرها 2

التمرين - 25

z_C ، z_B ، A نقط لواحظها على الترتيب $z_C = 1 + 2i$ ، $z_B = -i$ ، $z_A = 2$

1 - أحسب $|z_B - z_A|$ ، $|z_B - z_C|$ ، $|z_C - z_A|$

2 - استنتج طبيعة المثلث ABC

الحل - 25

- 1

$$|z_B - z_A| = |-i - 2| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$|z_B - z_C| = |-i - 1 - 2i| = |-1 - 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$|z_C - z_A| = |1 + 2i - 2| = |-1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

2 - نتيجة : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ إذن : $AB = AC$ منه ABC متساوي الساقين .

$$|z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2 = |z_B - z_C|^2 \quad \text{إذن : } AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{منه } ABC \text{ قائم في } A$$

خلاصة : ABC مثلث قائم الزاوية في A و متساوي الساقين .

التمرين - 26

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق المساواة المقترحة :

$$|z| = 2 \quad - 1$$

$$|-3z| = \sqrt{2} \quad - 2$$

$$|z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z) = 0 \quad - 3$$

الحل - 26

ليكن $z = x + iy$ لاحقة النقطة M

$$|z| = 2 \quad \text{يكافئ} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \quad - 1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي نقط الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها $\sqrt{4} = 2$

$$|-3z| = \sqrt{2} \quad \text{يكافئ} \quad 3|z| = \sqrt{2} \quad - 2$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{يكافئ}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$|z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad - 3$$

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1 \quad \text{تكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(1; 0)$ و نصف قطرها 1

التمرين - 27

z عدد مركب . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

$$|z + i + 2i| = |z - 4| \quad - 1$$

$$|z - 3i| = 2 \quad - 2$$

$$|2z - i| = 2 \quad -3$$

الحل - 27

ليكن $z = x + iy$ (الشكل التجبري لـ z)

$$|x + iy + 1 + 2i| = |x + iy - 4| \quad |z + 1 + 2i| = |z - 4| \quad -1 \quad \text{يكافئ}$$

$$|x + 1 + (y + 2)i| = |x - 4 + iy| \quad \text{يكافئ}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 \quad \text{يكافئ}$$

$$10x + 4y - 11 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $10x + 4y - 11 = 0$

$$|x + iy - 3i| = 2 \quad |z - 3i| = 2 \quad -2 \quad \text{يكافئ}$$

$$|x + i(y - 3)| = 2 \quad \text{يكافئ}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 4 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(0; 3)$ و نصف قطرها 2

$$|2x + 2iy - i| = 2 \quad |2z - i| = 2 \quad -3 \quad \text{تكافئ}$$

$$|2x + i(2y - 1)| = 2 \quad \text{تكافئ}$$

$$\sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = 2 \quad \text{تكافئ}$$

$$4x^2 + (2y - 1)^2 = 4 \quad \text{تكافئ}$$

$$4x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 \quad \text{تكافئ}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{تكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(0; \frac{1}{2})$ و نصف قطرها 1

التمرين - 28

$$\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \text{عدد مركب حيث}$$

$$1 - \text{أحسب } \alpha^2 \text{ ثم } \alpha^4$$

$$2 - \text{أحسب } |\alpha^4| \text{ ثم استنتج } |\alpha|$$

$$3 - \text{عين مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ حيث } |\alpha z| = 6$$

الحل - 28

$$\alpha^2 = 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} - (2 + \sqrt{2}) \quad -1$$

$$= 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{4 - 2} - 2 - \sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{2}(1 + i)$$

$$\alpha^4 = [-2\sqrt{2}(1 + i)]^2 \quad \text{منه :}$$

$$= 8(1 + i)^2$$

$$= 8(1 + 2i - 1)$$

$$= 16i$$

$$|\alpha^4| = |16i| = 16 \quad -2$$

$$|\alpha^4| = |\alpha|^4 \quad \text{لكن}$$

$$16 = |\alpha|^4 \quad \text{أي :}$$

$$|\alpha| = 2 \quad \text{منه : } |\alpha| = \sqrt[4]{16}$$

$$|\alpha| \cdot |z| = 6 \quad \text{تكافئ } |\alpha z| = 6 \quad -3$$

$$2|z| = 6 \quad \text{تكافئ}$$

$$|z| = 3 \quad \text{تكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي النقط التي تبعد بمسافة 3 عن المبدأ
أي هي الدائرة التي مركزها $O(0; 0)$ و نصف قطرها 3

التمرين 29

z عدد مركب غير معدوم .

1 - باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$

2 - إستنتج أن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم p فإن $\text{Arg}(z^p) = p \text{Arg}(z)$

الحل - 29

1 - من أجل $n = 1$: الخاصية محققة لأن $\text{Arg}(z^1) = 1 \times \text{Arg}(z)$

من أجل $n = 2$: $\text{Arg}(z^2) = \text{Arg}(z \times z) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z) = 2 \text{Arg}(z)$

إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$ من أجل $n > 2$

هل $\text{Arg}(z^{n+1}) = (n+1) \text{Arg}(z)$ ؟

لدينا : $\text{Arg}(z^{n+1}) = \text{Arg}(z^n \times z)$

$$= \text{Arg}(z^n) + \text{Arg}(z)$$

$$= n \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z)$$

$$= (n+1) \text{Arg}(z)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$

2 - ليكن $p \in \mathbb{Z}^*$ إذن : إما $p = n$ أو $p = -n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

الحالة الأولى : $p = n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

الخاصية محققة حسب السؤال (1)

الحالة الثانية : $p = -n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

$$z^p = z^{-n} \quad \text{إذن :}$$

$$z^p = \frac{1}{z^n} \quad \text{منه :}$$

$$\text{Arg}(z^p) = \text{Arg}\left(\frac{1}{z^n}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\text{Arg}(z^p) = \text{Arg}(1) - \text{Arg}(z^n) \quad \text{أي}$$

$$\text{Arg}(z^p) = 0 - \text{Arg}(z^n) \quad \text{أي}$$

$$\text{Arg}(z^p) = -n \text{Arg}(z) \quad \text{أي :}$$

$$p = -n \quad \text{منه :} \quad \text{Arg}(z^p) = p \text{Arg}(z) \quad \text{لأن}$$

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n فإن $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$

التمرين 30

z عدد مركب غير معدوم حيث $|z| = R$ و $\text{Arg}(z) = \theta$

عين عمدة و طويلة كل من الأعداد التالية :

$$-z, \quad \bar{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad z^3, \quad \frac{1}{z^n} \quad \text{حيث } n \in \mathbb{Z}^*$$

الحل - 30

$$\left. \begin{array}{l} |z| = R \\ \text{Arg}(z) = \theta \end{array} \right\} \quad \text{إذن : } z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$-z = -R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= R(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= R[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$$

$$\left. \begin{array}{l} |-z| = R \\ \text{Arg}(-z) = \pi + \theta \end{array} \right\} \quad \text{إذن :}$$

$$\bar{z} = R[\cos \theta - i \sin \theta] = R[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] \quad -2$$

$$\left. \begin{array}{l} |\bar{z}| = R \\ \text{Arg}(\bar{z}) = -\theta \end{array} \right\} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{R} \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) &= -\theta \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) &= 0 - \text{Arg}(z) \end{aligned} \right\} \quad -3$$

$$\left. \begin{aligned} |z^3| &= R^3 \\ \text{Arg}(z^3) &= 3\theta \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} |z^3| &= |z|^3 \\ \text{Arg}(z^3) &= 3 \text{Arg}(z) \end{aligned} \right\} \quad -4$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{z^n} \right| &= \frac{1}{R^n} \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{z^n}\right) &= -n\theta \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{z^n} \right| &= \frac{1}{|z^n|} \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{z^n}\right) &= 0 - \text{Arg}(z^n) \end{aligned} \right\} \quad -5$$

التمرين - 31

z عدد مركب غير معدوم طويلته R و عمدته θ
عين طويته و عمدته كل من الأعداد التالية :

$$\left(\frac{iz}{R}\right)^n, (iz)^5, 2iz, \frac{-7}{z}, \frac{z}{4}$$

الحل - 31

في هذا التمرين نستعمل الخاصية التالية : t عدد مركب غير معدوم .

إذا كان t عدد حقيقي موجب فإن $\text{Arg}(t) = 0$

إذا كان t عدد حقيقي سالب فإن $\text{Arg}(t) = \pi$

إذا كان t عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي موجب فإن $\text{Arg}(t) = \pi/2$

إذا كان t عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب فإن $\text{Arg}(t) = -\pi/2$

$$\text{Arg}\left(\frac{z}{4}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(4) = \theta \quad ; \quad \left| \frac{z}{4} \right| = \frac{|z|}{|4|} = \frac{R}{4} \quad -1$$

$$\text{Arg}\left(\frac{-7}{z}\right) = \text{Arg}(-7) - \text{Arg}(z) = \pi - \theta \quad ; \quad \left| \frac{-7}{z} \right| = \frac{|-7|}{|z|} = \frac{7}{R} \quad -2$$

$$\text{Arg}(2iz) = \text{Arg}(2i) + \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} + \theta \quad ; \quad |2iz| = |2i| \times |z| = 2R \quad -3$$

$$\text{Arg}(iz)^5 = 5 \text{Arg}(iz) = 5[\text{arg}(i) + \text{Arg}(z)] = 5\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad ; \quad |iz|^5 = (|i| \times |z|)^5 = R^5 \quad -4$$

$$\text{Arg}\left(\frac{iz}{R}\right)^n = n \text{Arg}\left(\frac{iz}{R}\right) = n[\text{Arg}(iz) - \text{Arg}(R)] \quad ; \quad \left| \frac{iz}{R} \right|^n = \left[\frac{|iz|}{|R|} \right]^n = \left(\frac{R}{R}\right)^n = 1 \quad -5$$

$$\text{Arg}\left(\frac{iz}{R}\right)^n = n\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad \text{إذن :}$$

التمرين - 32

في كل حالة من الحالات التالية عين طويته و عمدته العدد المركب z

$$z_3 = \sqrt{5} \left[\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right] \quad -3 \quad z_1 = 4 \left[\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad -1$$

$$z_4 = \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \quad -4 \quad z_2 = -3 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] \quad -2$$

الحل - 32

$$z_1 = 4 \left[\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad -1$$

$$= 4 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{شكل مثلثي}$$

$$\text{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad |z_1| = 4 \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = -3 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] \quad -2$$

$$= 3 \left[-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\text{شكل مثلثي} = 3 \left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$\text{إذن : } |z_2| = 3 \text{ و } \text{Arg}(z_2) = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$z_3 = \sqrt{5} \left[\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right] \quad - 3$$

$$\text{شكل مثلثي} = \sqrt{5} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\text{إذن : } |z_3| = \sqrt{5} \text{ و } \text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$z_4 = \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \quad - 4$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{شكل مثلثي} = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{إذن : } |z_4| = 1 \text{ و } \text{Arg}(z_4) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$$

التمرين 33

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad ; \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad ; \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_8 = -\sqrt{5} \quad ; \quad z_7 = \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_6 = -i \quad ; \quad z_5 = 3$$

الحل 33

في كل مرة نعتبر θ هي عمدة العدد المركب و R هي طويلته

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad - 1 \quad \text{إذن : } z_1 = 1 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] \text{ شكل مثلثي}$$

$$\text{منه : } R = 1 \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad - 2 \quad \text{إذن : } z_2 = 1 \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \text{ شكل مثلثي}$$

$$\text{منه : } R = 1 \quad ; \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad - 3 \quad \text{إذن : } z_3 = 1 \left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right] \text{ شكل مثلثي}$$

$$\text{منه : } R = 1 \quad ; \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad - 4 \quad \text{إذن : } z_4 = 1 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \text{ شكل مثلثي}$$

$$\text{منه : } R = 1 \quad ; \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$z_5 = 3 \quad - 5 \quad \text{إذن : } z_5 = 3 [\cos 0 + i \sin 0] \text{ شكل مثلثي}$$

$$z_6 = -i \quad - 6 \quad \text{إذن : } z_6 = 1 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \text{ شكل مثلثي}$$

$$z_7 = \frac{1}{2}i \quad - 7 \quad \text{إذن : } z_7 = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] \text{ شكل مثلثي}$$

$$z_8 = -\sqrt{5} \quad - 8 \quad \text{إذن : } z_8 = \sqrt{5} [\cos \pi + i \sin \pi] \text{ شكل مثلثي}$$

التمرين 34

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها المثلثي

$$- \sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad ; \quad -\sqrt{5} - i\sqrt{15} \quad ; \quad 3 - 3i \quad ; \quad 1 + i$$

الحل 34

$$- 1 \quad \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad |1+i| \quad \text{لتكن } \theta \text{ عمدة له}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] \text{ منه :}$$

$$|3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \quad \theta \text{ عمدة له}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$3 - 3i = 3\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \text{ منه :}$$

$$|-\sqrt{5} - i\sqrt{15}| = \sqrt{5 + 15} = 2\sqrt{5} \quad \theta \text{ عمدة له}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \text{ منه : } \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$-\sqrt{5} - i\sqrt{15} = 2\sqrt{5} \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right] \text{ منه :}$$

$$|-\sqrt{6} + i\sqrt{2}| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2} \quad \theta \text{ عمدة له}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$-\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right] \text{ منه :}$$

التمرين 35

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي .

$$z_3 = \frac{3i}{2 + 2i\sqrt{3}} \quad -3 \quad z_1 = (2 + 2i)(\sqrt{3} - i) \quad -1$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{6}}{1 + i} \quad -4 \quad z_2 = \frac{4}{\sqrt{3} + i} \quad -2$$

الحل 35

في هذا التمرين نستعمل خواص العمدة و الطويلة كمايلي :

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad -1$$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} |z_1| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2} \\ \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} \end{array} \right\} \text{ منه :}$$

$$z_1 = 4\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right] \text{ إذن :}$$

$$4 = 4[\cos 0 + i \sin 0] \quad -2$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} |z_2| &= 4/2 = 2 \\ \text{Arg}(z_2) &= 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$z_2 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \text{ إذن :}$$

$$3i = 3 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] \quad - 3$$

$$2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

$$|z_3| = 3/4$$

$$\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \left. \right\} \text{ إذن :}$$

$$z_3 = \frac{3}{4} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right] \text{ إذن :}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{6} [\cos 0 + i \sin 0] \quad - 4$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$|z_4| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Arg}(z_4) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad \left. \right\} \text{ إذن :}$$

$$z_4 = \sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \text{ منه :}$$

التمرين - 36

$$z = \frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \quad \text{ليكن}$$

1 - أكتب z على شكله الجبري .

2 - أكتب z على شكله المثلثي

3 - أكتب على شكلها المثلثي كل من الأعداد $\frac{1}{z}$ ، z^{2009} ، \bar{z}

الحل - 36

$$z = \frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \times \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \quad - 1$$

$$= \frac{4 + 4i\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3}}{1 + 3}$$

$$= \frac{4 - 4\sqrt{3}}{4} + i \frac{4\sqrt{3} + 4}{4}$$

$$z = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) \text{ و هو الشكل الجبري لـ } z$$

$$4 + 4i = 4\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad - 2$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$|z| = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \left. \right\} \text{ إذن :}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

$$z = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right] \text{ نتيجة : شكل مثلثي لـ } z$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) &= -\text{Arg}(z) = -\frac{7\pi}{12} \end{aligned} \right\} - 3$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right] \text{ منه}$$

$$\left. \begin{aligned} |z^{2009}| &= |z|^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009} \\ \text{Arg}(z^{2009}) &= 2009 \text{ Arg}(z) = 2009 \times \frac{7\pi}{12} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{2009 \times 7\pi}{12} = \frac{14063}{12} \pi = 1172 \pi - \frac{\pi}{12} \quad \text{لاحظ أن :}$$

$$\text{Arg}(z^{2009}) = -\frac{\pi}{12} \quad \text{إذن :}$$

$$z^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right]$$

$$\bar{z} = \bar{z} \times \frac{z}{z} = \frac{|z|^2}{z} \quad \text{و} \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{Arg}(\bar{z}) = \text{Arg}(|z|^2) - \text{Arg}(z) = 0 - \frac{7\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12} \quad \text{إذن :}$$

$$\bar{z} = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right] \quad \text{منه :}$$

التمرين 37

$$z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2(1-i)} \quad \text{ليكن}$$

اكتب كل من الأعداد التالية على شكلها الجبري : z^{2010} ، z^{12} ، z^6

الحل 37

لنبحث أولاً عن الشكل المثلثي للعدد z كما يلي :

$$\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

$$2(1-i) = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$|z| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

منه

$$z = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \quad \text{نتيجة :}$$

باستعمال قانون موافر نحصل على النتائج التالية :

$$z^6 = \cos\left(6 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(6 \times \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(7 \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(7 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(3 \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(3 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 - i$$

$$= -i$$

$$z^{12} = \cos\left(12 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(12 \times \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\cos 7\pi + i \sin 7\pi$$

$$= -1$$

$$z^{2010} = \cos\left(2010 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(2010 \times \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(1172\pi + 6 \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(1172\pi + 6 \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= i$$

$$\begin{array}{r|l} 14070 & 12 \\ 20 & 1172 \\ 87 & \\ 84 & \\ \hline 30 & \\ 6 & \end{array}$$

التمرين - 38

أكتب على شكلها الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$$2\sqrt{3} e^{-i \frac{2\pi}{3}} ; \quad \frac{1}{2} e^{i\pi} ; \quad \sqrt{5} e^{i \frac{3\pi}{2}} ; \quad 6 e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

الحل - 38

$$6 e^{i \frac{3\pi}{4}} = 6 \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$= 6 \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$= -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} e^{i \frac{3\pi}{2}} = \sqrt{5} \left[\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$= \sqrt{5} [0 - i]$$

$$= -i\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} e^{i\pi} = \frac{1}{2} [\cos \pi + i \sin \pi]$$

$$= \frac{1}{2} [-1 + 0i]$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3} e^{-i \frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 2\sqrt{3} \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]$$

$$= -\sqrt{3} - 3i$$

التمرين - 39

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسّي :

$$\frac{5}{4}i \quad -3 \quad 2-2i \quad -1$$

$$-1 \quad -4 \quad 3\sqrt{3}-3i \quad -2$$

الحل - 39

$$2-2i = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = 2\sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} \quad -1$$

$$3\sqrt{3}-3i = 6 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = 6 e^{-i \frac{\pi}{6}} \quad -2$$

$$\frac{5}{4}i = \frac{5}{4} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{5}{4} e^{i \frac{\pi}{2}} \quad -3$$

$$-1 = 1[\cos \pi + i \sin \pi] = e^{i\pi} \quad -4$$

التمرين - 40

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$-\sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{3}} \quad -3 \quad -e^{i \frac{\pi}{12}} \quad -1$$

$$-3 e^{i \frac{\pi}{8}} \quad -2$$

الحل - 40

$$-e^{i \frac{\pi}{12}} = e^{i\pi} \times e^{i \frac{\pi}{12}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{12})} = e^{i \frac{13\pi}{12}} \quad -1$$

في هذا التمرين نستعمل الخاصية

$$-3e^{i\pi/8} = 3 \times e^{i\pi} \times e^{i\pi/8} = 3 \times e^{9\pi/8} \quad -2$$

$$-\sqrt{2}e^{-i\pi/3} = \sqrt{2} \times e^{i\pi} \times e^{-i\pi/3} = \sqrt{2}e^{i2\pi/3} \quad -3$$

التمرين 41

أعط الشكل الأسّي لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$z_3 = (1 - \sqrt{2})e^{i\pi/4} \quad -3 \quad z_1 = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\pi/2} \quad -1$$

$$z_4 = 3\left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}\right) \quad -4 \quad z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\pi/3} \quad -2$$

الحل 41

$$z_1 = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\pi/2} \quad -1$$

$$= 4\sqrt{3} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right] e^{i\pi/2}$$

$$= 4\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) e^{i\pi/2}$$

$$= 4\sqrt{3} e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/2}$$

$$= 4\sqrt{3} e^{i5\pi/6}$$

$$z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\pi/3} \quad -2$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right] e^{i\pi/3}$$

$$= \sqrt{6} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] e^{i\pi/3}$$

$$= \sqrt{6} \times e^{i\pi/4} \times e^{i\pi/3}$$

$$= \sqrt{6} e^{i7\pi/12}$$

$$z_3 = (1 - \sqrt{2})e^{i\pi/4} \quad -3$$

$$= (\sqrt{2} - 1)(\cos \pi + i \sin \pi) e^{i\pi/4}$$

$$= (\sqrt{2} - 1)e^{i\pi} \times e^{i\pi/4}$$

$$= (\sqrt{2} - 1)e^{i5\pi/4}$$

$$z_4 = 3\left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}\right) \quad -4$$

$$= 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$= 3e^{-i\pi/7}$$

التمرين 42

في كل حالة ممايلي اكتب العدد المركب z على شكله الأسّي ثم إستنتج الشكل الجبري لـ \bar{z} و $\frac{1}{z}$:

$$z = (1 + i\sqrt{3})^4 \quad -2 \quad z = \frac{6}{1+i} \quad -1$$

$$z = 3ie^{i\pi/3} \quad -3$$

الحل 42

في هذا التمرين نستخدم الخاصيتين التاليتين :

$$\cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|} \bar{z}$$

$$z = \frac{6(\cos 0 + i \sin 0)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \quad \text{إذن} \quad z = \frac{6}{1+i} \quad -1$$

$$z = \frac{6 e^{i0}}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} \quad \text{منه} :$$

$$z = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} &= \frac{6}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} = \frac{6}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 3 + 3i \\ \frac{1}{z} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^2 \times (3 + 3i) = \frac{2}{36} (3 + 3i) = \frac{1}{6} + \frac{i}{6} \end{aligned} \right\} \text{نتيجة :}$$

$$z = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^4 \quad \text{إذن} \quad z = (1 + i\sqrt{3})^4 - 2$$

$$z = 16 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^4 \quad \text{أي}$$

$$z = 16 e^{4i\frac{\pi}{3}} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} &= 16 e^{-4i\frac{\pi}{3}} = 16 \left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = -8 + 8i\sqrt{3} \\ \frac{1}{z} &= \left(\frac{1}{16} \right)^2 \times (-8 + 8i\sqrt{3}) = \frac{-1}{32} + \frac{1}{32} i \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \text{نتيجة :}$$

$$z = 3 \times e^{i\pi/2} \times e^{i\pi/3} \quad \text{إذن} \quad z = 3 i e^{i\pi/3} \quad -3$$

$$z = 3 e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} &= 3 e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 3 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right] = \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \\ \frac{1}{z} &= \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right] = \frac{-1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}i \end{aligned} \right\} \text{نتيجة :}$$

التمرين - 43

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

$$z^2 - 5z + 9 = 0 \quad -5 \quad 2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad -1$$

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \quad -6 \quad z^2 + z + 1 = 0 \quad -2$$

$$z^2 + 3 = 0 \quad -7 \quad z^2 = z + 1 \quad -3$$

$$z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0 \quad -8 \quad z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \quad -4$$

الحل - 43

$$2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad -1$$

$$\Delta = 36 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$$

$$\Delta = (2i)^2 \quad \text{إذن} :$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{6 - 2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned} \right\} \text{منه : حلول المعادلة هي}$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad -2$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \quad (i\sqrt{3})^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \text{منه حلول المعادلة هي}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad z^2 = z + 1 \quad - 3$$

$$\Delta = 1 - 4(-1) = 5 = (\sqrt{5})^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ z_2 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ منه حلول المعادلة هي}$$

$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \quad - 4$$

$$\Delta = 64 \times 3 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \\ z_2 &= \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i \end{aligned} \right\} \text{ إذن حلول المعادلة هي :}$$

$$z^2 - 5z + 9 = 0 \quad - 5$$

$$\Delta = 25 - 4(9) = -11 = (i\sqrt{11})^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{5 - i\sqrt{11}}{2} = \frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} \\ z_2 &= \frac{5 + i\sqrt{11}}{2} = \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ إذن حلول المعادلة هي}$$

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \quad - 6$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{2 - 2i\sqrt{2}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \\ z_2 &= \frac{2 + 2i\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$z^2 = -3 \quad \text{تكافئ} \quad z^2 + 3 = 0 \quad - 7$$

$$z = -i\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad z = i\sqrt{3} \quad \text{تكافئ}$$

$$z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0 \quad - 8$$

$$\Delta = 4(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 8(\sqrt{2} + 2) = 12 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 16 = -4 = (2i)^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{2(1 + \sqrt{2}) - 2i}{2} = (1 + \sqrt{2}) - i \\ z_2 &= \frac{2(1 + \sqrt{2}) + 2i}{2} = (1 + \sqrt{2}) + i \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

التمرين 44

θ عدد حقيقي ثابت . حل في C المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0 \quad - 1$$

$$z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0 \quad - 2$$

الحل - 44

$$z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0 \quad - 1$$

$$\cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta \quad \text{لأن} \quad \Delta = 4 \cos^2 \theta - 4 = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{2 \cos \theta - 2i \sin \theta}{2} = \cos \theta - i \sin \theta \\ z_2 &= \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ إذن حلول المعادلة هي}$$

$$z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0 \quad - 2$$

$$\sin^2 \theta - 1 = -\cos^2 \theta \quad \text{لأن} \quad \Delta = 4 \sin^2 \theta - 4 = 4(\sin^2 \theta - 1) = -4 \cos^2 \theta = (2i \cos \theta)^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{2 \sin \theta - 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta - i \cos \theta \\ z_2 &= \frac{2 \sin \theta + 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta + i \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{ إذن حلول المعادلة هي}$$

التمرين 45
حل في C^2 الجملة التالية ذات المجهولين المركبين z و t : $\left. \begin{aligned} zt &= 5 \\ z+t &= -2 \end{aligned} \right\}$

الحل 45
إذا وجد z و t فإنهما حلول للمعادلة $z^2 + 2z + 5 = 0$ (مجموع و جداء حلتي معادلة من الدرجة 2)
إذن يكفي حل هذه المعادلة في C كمايلي :

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i \\ z_2 &= \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

نتيجة : $(z; t) \in \{(-1-2i; -1+2i); (-1+2i; -1-2i)\}$

تحقيق : $(-1-2i) + (-1+2i) = -2$

$(-1-2i)(-1+2i) = 1 + 4 = 5$

التمرين 46
أوجد العددين المركبين α و β حتى تكون حلول المعادلة $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ في C هي $1+2i$ و $3-5i$

الحل 46
مجموع الحلين هو : $(3-5i) + (1+2i) = 4-3i$

جداء الحلين هو : $(3-5i)(1+2i) = 3 + 6i - 5i + 10 = 13 + i$
إذن : المعادلة التي حلولها $(1+2i)$ و $(3-5i)$ هي $z^2 - (4-3i)z + 13 + i = 0$
منه : $\alpha = -(4-3i)$ و $\beta = 13 + i$

ملاحظة : يمكن البحث عن α و β بطريقة أخرى كمايلي :

$$\begin{aligned} (z - (1+2i))(z - (3-5i)) &= z^2 - (3-5i)z - (1+2i)z + (1+2i)(3-5i) \\ &= z^2 - z(3-5i+1+2i) + 3-5i+6i+10 \\ &= z^2 - (4-3i)z + 13 + i \end{aligned}$$

بالمطابقة مع $z^2 + \alpha z + \beta$ فإن $\left. \begin{aligned} \alpha &= -(4-3i) \\ \beta &= 13 + i \end{aligned} \right\}$

التمرين 47
حل في C المعادلة $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

الحل 47
نضع $t = z^2$ و نحل المعادلة $t^2 + 3t + 2 = 0$ ذات المجهول المركب t

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{-3-1}{2} = -2 \\ t_2 &= \frac{-3+1}{2} = -1 \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

منه : $\left. \begin{aligned} z^2 &= -2 \\ z^2 &= -1 \end{aligned} \right\}$ أي $z = i\sqrt{2}$ أو $z = -i\sqrt{2}$ أو $z = i$ أو $z = -i$

نتيجة : حلول المعادلة هي $\{i; -i; i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\}$

التمرين 48
حل في C المعادلة $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

الحل 48
نضع $t = z^2$ و نحل المعادلة $t^2 - 32t - 144 = 0$
 $\Delta = (32)^2 + 4 \times 144 = 64 \times 16 + 64 \times 9 = 64 \times 25 = (40)^2$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{32 - 40}{2} = -4 \\ t_2 = \frac{32 + 40}{2} = 36 \end{array} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} z^2 = -4 \\ z^2 = 36 \end{array} \right\} \text{ منه : } z \in \{2i; -2i; 6; -6\} \text{ إذن :}$$

أي حلول المعادلة هي $\{2i; -2i; 6; -6\}$

التمرين - 49

- 1 - حل في C المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ ثم أكتب الحلول على شكلها المثلثي .
2 - استنتج حلول المعادلة $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$ (I).....

الحل - 49

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \quad : z^2 - 2z + 2 = 0 \quad -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \end{array} \right.$$

الشكل المثلثي للحلول :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 1-i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ z_2 = 1+i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} t = -iz + 3i + 3 \\ t^2 - 2t + 2 = 0 \end{array} \right\} \text{ المعادلة (I) تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = -iz + 3i + 3 \\ t \in \{1-i; 1+i\} \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1-i = -iz + 3i + 3 \\ \text{أو} \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1+i = -iz + 3i + 3 \\ -iz = 1-i-3i-3 \\ \text{أو} \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

$$-iz = 1+i-3i-3$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{-2-4i}{-i} \\ \text{أو} \\ z = \frac{-2-2i}{-i} \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{-2-4i}{-i} \times \frac{i}{i} \\ \text{أو} \\ z = \frac{-2-2i}{-i} \times \frac{i}{i} \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

تكافئ $z \in \{4-2i; 2-2i\}$ و هي حلول المعادلة

التمرين - 50

1 - عين الجذرين التربيعيين للعدد $L = 2 - 2i\sqrt{3}$

2 - حل في C المعادلة $2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0$

الحل - 50

1 - ليكن $L = (\alpha + i\beta)^2$ حيث $\alpha \in R$ و $\beta \in R$

$$(أنظر الدرس) \begin{cases} \alpha & \sqrt{\frac{2+|L|}{2}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+12}}{2}} = \sqrt{\frac{2+4}{2}} - \sqrt{3} \\ \beta & \frac{-2\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

$$نتيجة : L = (\sqrt{3} - i)^2$$

$$تحقيق : (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} - 1 = L$$

$$2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0 \quad -2$$

$$\Delta = -16 - 4(2)(i\sqrt{3} - 3) = -16 - 8i\sqrt{3} + 24 = 8 - 8i\sqrt{3} = 4(2 - 2i\sqrt{3})$$

$$\Delta = 4L \quad \text{إذن :}$$

$$\Delta = (2\sqrt{3} - 2i)^2 \quad \text{أي} \quad \Delta = [2(\sqrt{3} - i)]^2 \quad \text{منه :}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{-4i - (2\sqrt{3} - 2i)}{4} = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \frac{-4i + (2\sqrt{3} - 2i)}{4} = \frac{2\sqrt{3} - 6i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :}$$

التمرين 51

$$1 - \text{عين العدد الحقيقي } x \text{ حيث } (x + 2i)^2 = -3 + 4i$$

$$2 - \text{حل في مجموعة الأعداد المركبة } C \text{ المعادلة } z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0$$

الحل 51

$$(x + 2i)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow x^2 + 4ix - 4 = -3 + 4i \quad -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4ix = 1 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$نتيجة : (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$$

$$z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0 \quad -2$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (3 - 4i)^2 - 4(-1 - 7i) \\ &= 9 - 24i - 16 + 4 + 28i \\ &= -3 + 4i \end{aligned}$$

$$\text{حسب السؤال الأول} = (1 + 2i)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{3 - 4i - (1 + 2i)}{2} = 1 - 3i \\ z_2 &= \frac{3 - 4i + (1 + 2i)}{2} = 2 - i \end{aligned} \right. \quad \text{إذن :}$$

التمرين 52

$$(1) \dots\dots\dots z^2 - (\sqrt{3} + 1 + 2i)z + (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i = 0$$

$$\text{أحسب } (\sqrt{3} - 1)^2 \text{ ثم حل في } C \text{ المعادلة (1)}$$

الحل 52

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= [(\sqrt{3} + 1) + 2i]^2 - 4[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i] \\ &= 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 4i(\sqrt{3} + 1) - 4 - 4(\sqrt{3} - 1) - 4i(\sqrt{3} + 1) \\ &= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4 \\ &= -4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{حسب السؤال الأول} \quad (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{3}+1+2i(\sqrt{3}-1)}{2} = 1+i \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}+1+2i(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}+i \end{cases}$$

التمرين 53 =

أحسب $(\sqrt{3}+3i)^2$ ثم حل في C المعادلة $2z^2 + (3\sqrt{3}+i)z + 4 = 0$

الحل 53 =

$$(\sqrt{3}+3i)^2 = 3 + 6i\sqrt{3} - 9 = -6 + 6i\sqrt{3}$$

$$\Delta = (3\sqrt{3}+i)^2 - 4(2)(4)$$

$$= 27 + 6i\sqrt{3} - 1 - 32$$

$$= -6 + 6i\sqrt{3}$$

$$= (\sqrt{3}+3i)^2 \quad \text{حسب السؤال الأول}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(3\sqrt{3}+i) - (\sqrt{3}+3i)}{4} = \frac{-4\sqrt{3}-4i}{4} = -\sqrt{3}-i \\ z_2 = \frac{-(3\sqrt{3}+i) + (\sqrt{3}+3i)}{4} = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$$

التمرين 54 =

1 - عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $3+4i$

2 - حل في C المعادلة $z^2 - 2(1+2i)z + 9+20i = 0$

الحل 54 =

$$(\alpha + \beta i)^2 = 3 + 4i \quad 1 - \text{ليكن}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{4}{4} = 1 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{3+5}{2}} \\ \beta = \frac{4}{2\alpha} \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{3+|3+4i|}{2}} \\ \beta = \frac{4}{2\alpha} \end{array} \right\} \text{ إذن :}$$

$$(2+i)^2 = 3+4i \quad \text{نتيجة :}$$

منه : الجذران التربيعيان لـ $3+4i$ هما $\{-2-i; 2+i\}$

2 - حل المعادلة :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(1+2i)^2 - 4(9+20i) \\ &= 4 + 16i - 16 - 36 - 80i \\ &= -48 - 64i \\ &= -16(3+4i) \\ &= [4i(2+i)]^2 \\ &= (8i-4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2(1+2i) - (8i-4)}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i \\ z_2 = \frac{2(1+2i) + (8i-4)}{2} = \frac{-2+12i}{2} = -1+6i \end{cases}$$

التمرين 55 =

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيين $(x; y)$ النقطة M' ذات الإحداثيين $(x'; y')$

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 1 \\ y' = 5x - 3y \end{cases} \quad \text{حيث :}$$

1 - عين إحداثيات A' صورة النقطة A(-1; 1) بالتحويل T

2 - عين إحداثيات B سابقة النقطة B'(-2; 3) بالتحويل T

3 - عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T

الحل - 55

$$1 - \text{لتكن } A'(x'; y') : \begin{cases} x' = -3(-1) + 2(1) + 1 = 6 \\ y' = 5(-1) - 3(1) = -8 \end{cases}$$

منه : $A'(6; -8)$

$$2 - \text{لتكن } B(x; y) : \begin{cases} -2 = -3x + 2y + 1 \\ 3 = 5x - 3y \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y + 3 = 0 \\ 5x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \text{ أي :}$$

نحل جملة المعادلتين كما يلي :

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1$$

$$\text{إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا : } \begin{cases} x = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \\ y = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 9 = -6 \end{cases}$$

نتيجة : $B(-3; -6)$ 3 - لتكن $w(x; y)$ نقطة من المستوي . $T(w) = w$ صامدة بـ T يكافئ

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y + 1 = x \\ 5x - 3y = y \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\text{جملة معادلتين ذات مجهولين حقيقيين} \begin{cases} -4x + 2y + 1 = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 10 = 6$$

$$\text{إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا . } \begin{cases} x = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

نتيجة : توجد نقطة صامدة وحيدة بالتحويل T وهي $w(\frac{2}{3}; \frac{5}{6})$ تحقيق : لتكن $w'(x'; y')$ صورة $w(\frac{2}{3}; \frac{5}{6})$

$$\text{إذن : } \begin{cases} x' = -3(\frac{2}{3}) + 2(\frac{5}{6}) + 1 = \frac{-6+5+3}{3} = \frac{2}{3} \\ y' = 5(\frac{2}{3}) - 3(\frac{5}{6}) = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -3x + 4y - 12 \\ y' &= -\frac{3}{2}x + 2y - 4 \end{aligned} \right\} \text{ حيث } M(x; y) \text{ النقطة } M'(x'; y') \text{ تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة } T$$

1 - عين مجموعة النقاط الصامدة بالتحويل T 2 - أثبت أن إذا كانت M ليست صامدة فإن منتصف القطعة $[MM']$ ينتمي إلى مستقيم ثابت يطلب معادلته .3 - أثبت أن M' تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب معادلته**الحل - 56**1 - لتكن $w(x; y)$ نقطة من المستوي . $T(w) = w$ صامدة يكافئ

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 4y - 12 = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} -4x + 4y - 12 = 0 \\ -\frac{3}{2}x + y - 4 = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ (جملة معادلتين)}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2+3 \\ 3 & -2 & -2+3-1 \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \left| \begin{array}{cc|c} -1 & 3 \\ -2 & 8 \end{array} \right| = -8 + 6 = -2 \\ y - \left| \begin{array}{cc|c} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{array} \right| = 9 - 8 = 1 \end{array} \right.$$

نتيجة : T يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $w(-2; 1)$

2- لتكن M نقطة من المستوي حيث لا تنطبق على w

نسمى A منتصف القطعة $[MM']$

نضع $A(X; Y)$ إحداثيات النقطة A

$$\left. \begin{array}{l} X = \frac{x' + x}{2} \\ Y = \frac{y' + y}{2} \end{array} \right\} \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} X = \frac{-3x + 4y - 12 + x}{2} \\ Y = \frac{-\frac{3}{2}x + 2y - 4 + y}{2} \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} X = \frac{-2x + 4y - 12}{2} \\ Y = \frac{\frac{1}{2}(-3x + 6y - 8)}{2} \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} X = -x + 2y - 6 \\ Y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}y - 2 \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$3X - 4Y = -3x + 6y - 18 + 3x - 6y + 8 \quad \text{منه :}$$

$$3X - 4Y = -10 \quad \text{أي :}$$

$$3X - 4Y + 10 = 0 \quad \text{أي : (مستقل عن x و y)}$$

نتيجة : إذا كانت M تختلف عن w فإن منتصف $[MM']$ ينتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $3x - 4y + 10 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} X - 3x + 4y - 12 \\ Y = -\frac{3}{2}x + 2y - 4 \end{array} \right\} \text{إذن : } M'(X; Y) \text{ لتكن 3-}$$

$$X - 2Y = -3x + 4y - 12 - 2\left(-\frac{3}{2}x + 2y - 4\right) \quad \text{منه :}$$

$$X - 2Y = -3x + 4y - 12 + 3x - 4y + 8 \quad \text{أي :}$$

$$X - 2Y = -4 \quad \text{أي :}$$

$$X - 2Y + 4 = 0 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : النقطة M' تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $x - 2y + 4 = 0$

التمرين - 57

ABC مثلث . E ، F ، G هي صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه \vec{AB} و I ، J ، K هي صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه \vec{BC} ، اثبت أن C هي منتصف القطعة [IG]

الحل - 57

لدينا : $\vec{AE} = \vec{AB}$ إذن : E تنطبق على B

$\vec{BF} = -\vec{BA}$ إذن : $\vec{BF} = \vec{AB}$

$$\vec{CG} = \vec{AB}$$

$$\vec{AI} = \vec{BC}$$

إذن : J تنطبق على C

$$\vec{CK} = \vec{BC}$$

نتائج : $\vec{AI} = \vec{BC}$ إذن : الرباعي ICBA متوازي أضلاع .

أي الرباعي ICEA متوازي أضلاع لأن E تنطبق على B

$$\vec{AE} = \vec{IC} \quad \text{منه :}$$

$$\vec{IC} + \vec{GC} = \vec{AE} + \vec{GC} \quad \text{إذن :}$$

$$= \vec{AE} - \vec{CG}$$

$$= \vec{AB} - \vec{AB}$$

$$= \vec{0}$$

منه : C هي منتصف [IG]

التمرين - 58

اكتب معادلة (Δ') صورة المستقيم (Δ) ذو المعادلة $3x + 2y - 5 = 0$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

الحل - 58

لنبحث عن عبارة الانسحاب ذو الشعاع $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

لتكن $M(x; y)$ و $M'(x'; y')$ نقطتين من المستوي .

M' صورة M يكافئ $\vec{MM'} = \vec{u}$

$$\begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = -3 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \text{و هي عبارة الانسحاب}$$

نبحث الآن عن عبارتي x و y بدلالة x' و y'

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

نتيجة : إذا كانت $M(x; y)$ نقطة من (Δ) فإن

$$3x + 2y - 5 = 0$$

$$3(x' - 2) + 2(y' + 3) - 5 = 0 \quad \text{أي}$$

$$3x' - 6 + 2y' + 6 - 5 = 0 \quad \text{أي}$$

$$3x' + 2y' - 5 = 0 \quad \text{أي}$$

منه : معادلة (Δ') هي : $3x + 2y - 5 = 0$

أي : (Δ') ينطبق على (Δ)

التمرين - 59

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ النقطة $M'(x'; y')$. في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة

التحويل T و عناصره الهندسية المميزة

$$\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 4 \end{cases} \quad -2 \quad \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases} \quad -1$$

الحل - 59

للبحث عن طبيعة التحويلين نبحث عن شكلهما المركب كمايلي :

نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ ثم نبحث عن عبارة z' بدلالة z

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x - 4) + i(y + 2) & \text{منه} & \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases} \\ x' + iy' &= x + iy - 4 + 2i & \text{أي} & \\ z' &= z - 4 + 2i & \text{أي} & \end{aligned}$$

نتيجة : التحويل T من الشكل $z' = z + \beta$ حيث $\beta = -4 + 2i$

إذن : T هو انسحاب شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' + iy' &= -2x - 3 + i(-2y + 4) & \text{منه} & \begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 4 \end{cases} \\ x' + iy' &= -2x - 2iy - 3 + 4i & \text{أي} & \\ x' + iy' &= -2(x + iy) - 3 + 4i & \text{أي} & \\ z' &= -2z - 3 + 4i & \text{أي} & \end{aligned}$$

نتيجة : التحويل T من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ إذن : T هو تحاكي نسبته (-2) و مركزه النقطة w ذات اللاحقة $\frac{3-4i}{-2-1}$

أي $w(-1; \frac{4}{3})$

التمرين - 60

أكتب العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

الحل - 60

عبارة الانسحاب الذي شعاعه هو صورة العدد المركب β هي : $z' = z + \beta$

إذن : $\beta = -1 + 2i$ لأن $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

منه : $z' = z - 1 + 2i$ هي عبارة الانسحاب

التمرين - 61

أكتب العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 3

الحل - 61

عبارة التحاكي ذات النسبة 3 هي : $z' = 3z + \beta$ حيث المركز هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{3-1}$

منه : $\frac{-\beta}{3-1} = 0$ أي $\beta = 0$ لأن المركز هو $O(0; 0)$

نتيجة : عبارة التحاكي هي $z' = 3z$

التمرين - 62

w نقطة لاحقها $1-i$

عين العبارة المركبة للتحاكي H الذي نسبته $-\frac{1}{2}$ و مركزه w

الحل - 62

H تحاكي نسبته $-\frac{1}{2}$ إذن : عبارة H هي $z' = -\frac{1}{2}z + \beta$ حيث $\beta \in \mathbb{C}$

و $\frac{-\beta}{-\frac{1}{2}-1}$ هي لاحقة المركز w

إذن : $1-i = \frac{-\beta}{-\frac{1}{2}-1}$

أي $1-i = \frac{2\beta}{3}$

منه : $\beta = \frac{3(1-i)}{2}$

أي $\beta = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

نتيجة : عبارة التحاكي H هي $z' = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

التمرين - 63

اكتب العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه مبدأ المعظم وزاويته $\frac{\pi}{6}$

الحل - 63

زاوية الدوران R هي $\frac{\pi}{6}$ إذن عبارته : $z' = (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})z + \beta$ حيث

هي لاحقة المركز $\frac{(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) - 1}{- \beta}$

منه : $\beta = 0$ أي $\frac{\beta}{(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) - 1} = 0$

إذن : عبارة الدوران R هي : $z' = (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})z$

أي $z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)z$

التمرين - 64

t تحويل نقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$ في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة التحويل t وعناصره الهندسية المميزة .

1 - $\alpha = 1$ ؛ $\beta = 3 + i$ 3 - $\alpha = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\beta = 0$

2 - $\alpha = i$ ؛ $\beta = 1 - i$ 4 - $\alpha = \frac{5}{2}$ ؛ $\beta = \frac{2i}{5}$

الحل - 64

1 - $\alpha = 1$ إذن : t هو الانسحاب الذي شعاعه صورة العدد β

أي : t انسحاب شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 - $\alpha = i$ إذن : $|\alpha| = 1$

منه : t دوران مركزه w ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و الزاوية $\theta = \text{Arg}(\alpha)$

لدينا $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1$ إذن : مركز الدوران هو $w(1; 0)$

$\alpha = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ إذن : زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$

3 - $\alpha = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

منه $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} |1 - i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 + 1} = 1$

إذن : t هو دوران مركزه النقطة w ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و زاويته $\theta = \text{Arg}(\alpha)$

لدينا : $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = 0$ إذن : المركز هو المبدأ $O(0; 0)$

$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})$ إذن : زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{4}$

4 - $\alpha = 5/2$ إذن : $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

إذن : t هو تحاكي نسبته $5/2$ و مركزه W ذات اللاحقة

إذن : المركز هو $w(0; -4/15)$ $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{-\frac{2}{5}i}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}i = -\frac{4}{15}i$

التمرين 65

$z_3 = 8 - i$ ، $z_2 = -2 + 3i$ ، $z_1 = 3 + i$ الترتيب C ، B ، A

- 1 - عين نسبة التحاكي h ذو المركز C و الذي يحول A إلى B
- 2 - المستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل نقطي معين نقول عنه أنه صامد إجمالياً بهذا التحويل . برهن ان المستقيم الذي يشمل النقطة C و معامل توجيهه 2 صامد إجمالياً بالتحويل h ثم أكتب معادلة له .

الحل - 65

1 - لنكن $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ حيث h نسبة التحاكي

$$\vec{CB} = \alpha \vec{CA} \quad \text{يكافئ} \quad h(A) = B$$

$$z_2 - z_3 = \alpha(z_1 - z_3) \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha = \frac{-2 + 3i - (8 - i)}{3 + i - (8 - i)} \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha = \frac{-10 + 4i}{-5 + 2i} \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha = \frac{2(-5 + 2i)}{-5 + 2i} \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha = 2 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : نسبة التحاكي h هي 2

2 - ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C و معامل توجيهه 2

إذا كانت M نقطة من (Δ) و M' صورة M بالتحويل h فإن : $\vec{CM'} = 2 \vec{CM}$

إذن : النقط C ، M و M' على استقامة واحدة

منه : M' تنتمي إلى (Δ)

إذن : صورة (Δ) بالتحويل h تنطبق على (Δ)

نتيجة : المستقيم (Δ) صامد إجمالياً بالتحويل h

معادلة (Δ) : معامل توجيه (Δ) هو 2 إذن : معادلة (Δ) : $y = 2x + b$ حيث $b \in \mathbb{R}$

بما أن C تنتمي إلى (Δ) فإن : $-1 = 2(8) + b$

أي : $b = -17$

نتيجة : (Δ) له المعادلة $y = 2x - 17$

التمرين 66

$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} i$ ، $z_1 = \frac{1}{2} (1 - i)$ الترتيب B و A نقطتان من المستوي لاحقاًهما على الترتيب

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعظم و يحول A إلى B

الحل - 66

O هو مركز الدوران . و لنكن θ زاويته .

صورة A هي B إذن : $\theta = (\vec{OA} ; \vec{OB})$

أي : $\theta = \text{Arg}(z_B - z_O) - \text{Arg}(z_A - z_O)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) \\ -\frac{\pi}{4} &= \text{Arg}\left(\frac{1}{2} (1 - i)\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{لدينا}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{أي}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad \text{أي}$$

نتيجة : زاوية الدوران هي $\frac{3\pi}{4}$

التمرين 67 -

t تحويل نقطي للمستوي معرف بـ $\left. \begin{array}{l} x' = 1 - y \\ y' = x - 2 \end{array} \right\}$

نضع $z' = x' + iy'$ و $z = x + iy$

1 - أكتب z' بدلالة z

2 - ماهي الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل t ؟

الحل 67 -

$$x' + iy' = 1 - y + i(x - 2) \quad - 1$$

$$= 1 - y + ix - 2i$$

$$= i(x + iy) + 1 - 2i$$

$$z' = iz + 1 - 2i \quad \text{إذن :}$$

2 - نتيجة : التحويل t من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\left. \begin{array}{l} \alpha = i \\ \beta = 1 - 2i \end{array} \right\}$

$\theta = \text{Arg}(\alpha)$ و زاويته $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ إذن : دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $|\alpha| = |i| = 1$

$$\frac{-(1 - 2i)}{i - 1} = \frac{-(1 - 2i)}{i - 1} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{1 + i - 2i + 2}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{المركز :}$$

إذن : مركز الدوران هو $w\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\theta = \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{إذن زاوية الدوران هي } \frac{\pi}{2}$$

التمرين 68 -

t تحويل نقطي للمستوي حيث $\left. \begin{array}{l} x' = 2x - \frac{3}{2} \\ y' = 2y + \frac{1}{2} \end{array} \right\}$

أكتب العبارة المركبة للتحويل t ثم إستنتج طبيعته و عناصره المميزة .

الحل 68 -

ليكن $z' = x' + iy'$ و $z = x + iy$

$$x' + iy' = 2x - \frac{3}{2} + i\left(2y + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2x - \frac{3}{2} + 2yi + \frac{1}{2}i$$

$$= 2(x + iy) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z' = 2z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{منه :}$$

نتيجة : t هو تحاكي نسبته 2 و مركزه النقطة w ذات اللاحقة

$$w\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{إذن : المركز هو} \quad \frac{-\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2 - 1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

التمرين 69 -

حل في C^2 الجملة $\left\{ \begin{array}{l} 3z + t = 2 - 5i \\ z - t = -2 + i \end{array} \right.$ ذات المجهولين z و t

الحل 69 -

$$\left\{ \begin{array}{l} 3z + t + z - t = 2 - 5i - 2 + i \\ t = z + 2 - i \end{array} \right. \quad \text{الجملة تكافئ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4z = -4i \\ t = z + 2 - i \end{array} \right. \quad \text{تكافئ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -i \\ t = -i + 2 - i \end{array} \right. \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} z = -i \\ t = 2 - 2i \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

التمرين - 70

$$\text{حل في } C^2 \text{ الجملة } \begin{cases} 2iz + t = 2i \\ 3z - it = 1 \end{cases} \text{ ذات المجهولين } z \text{ و } t$$

الحل - 70

يمكن استعمال طريقة المحدد كراميلي : $\begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 3 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2i \\ -1 & 2i \end{vmatrix}$:
إذن الجملة تقبل حلا وحيدا $(z; t)$ حيث :

$$\begin{cases} z = - \begin{vmatrix} 1 & -2i \\ -i & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1 \\ t = - \begin{vmatrix} -2i & 2i \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6i + 2i) = 4i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2i(-1) + 4i = 2i \\ 3(-1) - i(4i) = -3 + 4 = 1 \end{cases} \quad \text{تحقيق :}$$

ملاحظة : يمكن حل هذه الجملة باستعمال طريقة الجمع و التعويض .

التمرين - 71

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = 1 \quad \text{فإن } n \text{ فأن كل عدد طبيعي } n$$

الحل - 71

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{1+2i-1}{1+1} \\ &= i \end{aligned}$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} &= \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right]^{4n} \quad \text{إذن :} \\ &= \cos 4n \frac{\pi}{2} + i \sin 4n \frac{\pi}{2} \\ &= \cos 2\pi n + i \sin 2\pi n \\ &= 1 \end{aligned}$$

التمرين - 72

$$\text{برر أن العددين } (1+i)^8 \text{ و } \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} \text{ حقيقيان .}$$

الحل - 72

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad -1$$

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^8 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{2})^8 \times \left[\cos 8 \times \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \times \frac{\pi}{4}\right] \\ &= 16[\cos 2\pi + i \sin 2\pi] \end{aligned}$$

$$= 16 \quad \text{إذن : } (1+i)^8 \text{ عدد حقيقي .}$$

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad -2$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008} \quad \text{إذن :}$$

$$\cos\left(-2008 \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-2008 \frac{\pi}{4}\right) \\ = \cos(-502 \pi) + i \sin(-502 \pi)$$

$$1 \quad \text{اذن : } \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} \text{ عدد حقيقي .}$$

التمرين - 73

في كل من الحالات التالية عين الطبيعة الهندسية لمجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى ذات اللاحقة z و التي تحقق المساواة :

$$\begin{array}{ll} \text{Re}(z) = \text{Im}(z) & -3 \\ [\text{Re}(z+1)]^2 - \text{Im}(z-2) = 0 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Re}(z) = -3 & -1 \\ \text{Im}(z) = 2 & -2 \end{array}$$

الحل - 73

$$\left. \begin{array}{l} z+1 = (x+1) + i y \\ z-2 = (x-2) + i y \end{array} \right\} \text{ اذن : } z = x - i y$$

$$\begin{array}{ll} \text{Re}(z) = -3 & -1 \text{ يكفي } x = -3 \text{ اذن : مجموعة النقط } M \text{ هي المستقيم ذو المعادلة } x = -3 \\ \text{Im}(z) = 2 & -2 \text{ يكافي } y = 2 \text{ اذن : مجموعة النقط } M \text{ هي المستقيم ذو المعادلة } y = 2 \\ \text{Re}(z) = \text{Im}(z) & -3 \text{ يكافي } x = y \text{ اذن : مجموعة النقط } M \text{ هي المستقيم ذو المعادلة } x = y \text{ (المنصف الاول)} \\ [\text{Re}(z+1)]^2 - \text{Im}(z-2) = 0 & -4 \text{ يكافي } (x+1)^2 - y = 0 \\ & \text{يكافي } y = (x+1)^2 \end{array}$$

اذن : مجموعة النقط M هي منحنى الدالة f المعرفة على R
 $f(x) = (x+1)^2$ —

التمرين - 74

A, B, C ثلاث نقط من المستوى لواقعها على الترتيب $1, z, z^2$
 عين مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حتى تكون النقط A, B, C على إستقامة واحدة .

الحل - 74

$$\text{ليكن } z = x + i y \\ \text{اذن : } z^2 = x^2 - y^2 + 2 x y i$$

$$\text{منه : } C(x^2 - y^2; 2 x y) ; B(x; y) ; A(1; 0)$$

$$\text{اذن : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ 2 x y \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

نتيجة : A, B, C على إستقامة واحدة يكافي $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$

$$\left| \begin{array}{cc} x-1 & x^2-y^2-1 \\ y & 2xy \end{array} \right| = 0 \text{ يكافي}$$

$$\text{يكافي : } 2xy(x-1) = y(x^2 - y^2 - 1)$$

مناقشة : إذا كان $y = 0$ فإن المساواة $y(x^2 - y^2 - 1) = 2xy(x-1)$ دائما محققة اذن : محور الفواصل هو جزء من مجموعة النقط المطلوبة

إذا كان $y \neq 0$ المساواة تصبح :

$$2x(x-1) = x^2 - y^2 - 1 \quad \text{اي :}$$

$$2x^2 - 2x = x^2 - y^2 - 1 \quad \text{اي :}$$

$$y^2 = x^2 - 1 - 2x + 2x \quad \text{اي :}$$

$$y^2 = x^2 + 2x - 1 \quad \text{اي :}$$

$$y^2 = (x^2 + 2x + 1) - 2 \quad \text{اي :}$$

$$y^2 = (x+1)^2 - 2 \quad \text{اي :}$$

$$\text{اي : } y = 0 \text{ و } x = 1$$

خلاصة : مجموعة النقط M التي تحقق أن A, B, C على إستقامة واحدة هي محور الفواصل فقط .

التمرين - 75

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 + (-1-5i)z^2 + (-7-4i)z - 2 + 12i$

اثبت أن p يقبل جذرا حقيقيا يطلب تعيينه

الحل - 75

نكر $\alpha \in \mathbb{R}$ α جذر لـ p يكافئ $p(\alpha) = 0$

$$\alpha^3 + (-1 - 5i)\alpha^2 + (-7 - 4i)\alpha - 2 + 12i = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 5i\alpha^2 - 7\alpha - 4i\alpha - 2 + 12i = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 7\alpha - 2 + i(-5\alpha^2 - 4\alpha + 12) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \dots\dots \alpha^3 - \alpha^2 - 7\alpha - 2 &= 0 \\ (2) \dots\dots -5\alpha^2 - 4\alpha + 12 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\Delta = 16 + 240 = 256 = (16)^2 \quad : (2) \text{ لنحل المعادلة}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{4 - 16}{-10} = \frac{-12}{-10} = \frac{6}{5} \\ \alpha_2 = \frac{4 + 16}{-10} = \frac{20}{-10} = -2 \end{cases}$$

هل $\alpha = 6/5$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 7\left(\frac{6}{5}\right) - 2 = \frac{216 - 180 - 1050 - 250}{125} = \frac{-1264}{125}$$

إذن : $\alpha = 6/5$ لا يحقق المعادلة (1) (مرفوض)هل $\alpha = -2$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$(-2)^3 - (-2)^2 - 7(-2) - 2 = -8 - 4 + 14 - 2 = 0$$

إذن : $\alpha = -2$ يحقق المعادلة (1)نتيجة : العدد $\alpha = -2$ هو الجذر الحقيقي الوحيد لكثير الحدود p

التمرين - 76

 A, B, C نـقـط من المستوى لواحـقـها على الترتيب $3i, -3i, -2-3i$ 1 - عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 2); (C; -2)\}$ 2 - عين مجموعة النقط M من المستوى حيث $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$

الحل - 76

$$1 - \text{لاحقة النقطة } G \text{ هي } \frac{1(3i) + 2(-3i) - 2(2-3i)}{1+2-2} = 3i - 6i - 4 + 6i = -4 + 3i$$

$$2 - AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25 \quad \text{تكافئ} \quad (\vec{AG} + \vec{GM})^2 + 2(\vec{BG} + \vec{GM})^2 - 2(\vec{CG} + \vec{GM})^2 = 25$$

$$AG^2 + 2BG^2 - 2CG^2 + GM^2 + 2GM^2 - 2GM^2 = 25 \quad \text{تكافئ (انظر الملاحظة)}$$

$$GM^2 = 25 - AG^2 - 2BG^2 + 2CG^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$GM^2 = 25 - |-4 + 3i - 3i|^2 - 2|-4 + 3i + 3i|^2 + 2|-4 + 3i - 2 + 3i|^2 \quad \text{يكافئ}$$

$$GM^2 = 25 - |-4|^2 - 2|-4 + 6i|^2 + 2|-6 + 6i|^2 \quad \text{يكافئ}$$

$$GM^2 = 25 - 16 - 2(52) + 2(72) \quad \text{يكافئ}$$

$$GM^2 = 49 \quad \text{يكافئ}$$

$$GM = 7 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M هي النقط التي تبعد عن G بمسافة 7 أي هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 7

$$\text{ملاحظة : } 2\vec{AG} \cdot \vec{GM} + 4\vec{BG} \cdot \vec{GM} - 4\vec{CG} \cdot \vec{GM} = 2\vec{GM}(\vec{AG} + 2\vec{BG} - 2\vec{CG}) = \vec{0}$$

لأن : G هو مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; 2); (C; -2)\}$

التمرين - 77

نرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x'; y')$ ذات اللاحقة z' حيث $z' = z^2 - 2(1+i)z$ 1 - عبر عن x' و y' بدلالة x و y 2 - لتكن (γ) مجموعة النقط M حيث z' عدد حقيقيبرهن أن (γ) هو منحنى لدالة عددية f يطلب عبارتها

الحل - 77

$$z' = x' + iy' \quad , \quad z = x + iy \quad -1$$

$$z^2 - 2(1+i)z = (x+iy)^2 - 2(1+i)(x+iy)$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi - 2(x+iy+ix-y)$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi - 2x + 2y - 2ix - 2iy$$

$$= x^2 - y^2 - 2x + 2y + i(2xy - 2x - 2y)$$

$$z' = x^2 - y^2 - 2x + 2y + i(2xy - 2x - 2y) \quad \text{نتيجة :}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x^2 - y^2 - 2x + 2y \\ y' &= 2xy - 2x - 2y \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$y' = 0 \quad z' - 2 \quad \text{كافئ حقيقي}$$

$$2xy - 2x - 2y = 0 \quad \text{كافئ}$$

$$xy - x - y = 0 \quad \text{كافئ}$$

$$y(x-1) - x = 0 \quad \text{كافئ}$$

$$y(x-1) = x \quad \text{كافئ}$$

$$x \neq 1 \quad \text{مع } y = \frac{x}{x-1} \quad \text{كافئ}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{نتيجة : } (y) \text{ هو منحني الدالة } f \text{ المعرفة على } R - \{1\} \rightarrow$$

التمرين - 78

$$z = x + iy \quad \text{عدد مركب يكتب على شكله الجبري}$$

$$\text{نضع } \alpha = z - 2\bar{z} + 2 + 3i \quad \text{حيث } \bar{z} \text{ هو مرافق } z$$

$$1 - \text{أحسب بدلالة } x \text{ و } y \text{ الجزء التخيلي و الجزء الحقيقي لـ } \alpha$$

$$2 - \text{حل في } C \text{ المعادلة } \alpha = 0 \quad \text{ذات المجهول } z$$

الحل - 78

$$\alpha = z - 2\bar{z} + 2 + 3i \quad -1$$

$$= x + iy - 2(x - iy) + 2 + 3i$$

$$= x + iy - 2x + 2iy + 2 + 3i$$

$$= 2 - x + i(3y + 3)$$

$$\text{منه : } \operatorname{Re}(\alpha) = 2 - x \quad \text{و} \quad \operatorname{Im}(\alpha) = 3y + 3$$

$$2 - \alpha = 0 \quad \text{كافئ} \quad \operatorname{Re}(\alpha) = 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Im}(\alpha) = 0$$

$$3y + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2 - x = 0 \quad \text{كافئ}$$

$$y = -1 \quad \text{و} \quad x = 2 \quad \text{كافئ}$$

$$z = 2 - i \quad \text{كافئ}$$

$$\text{إذن : المعادلة } \alpha = 0 \quad \text{تقبل حلا وحيدا هو } z = 2 - i$$

التمرين - 79

$$z = x + iy \quad \text{عدد مركب يكتب على شكله الجبري}$$

$$\text{نضع } \alpha = iz + \bar{z} - 3 - 2i$$

$$1 - \text{أحسب } \alpha - \bar{\alpha} \text{ بدلالة } x \text{ و } y$$

$$2 - \text{برهن أن : النقطة ذات اللاحقة } \alpha \text{ تنتمي إلى محور الفواصل تكافئ النقطة ذات اللاحقة } z \text{ تنتمي إلى المستقيم ذو}$$

$$\text{المعادلة } y = x - 2$$

الحل - 79

$$\alpha = i(x + iy) + x - iy - 3 - 2i \quad -1$$

$$= ix - y + x - iy - 3 - 2i$$

$$= (x - y - 3) + i(x - y - 2)$$

$$\bar{\alpha} = (x - y - 3) - i(x - y - 2) \quad \text{إذن :}$$

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2i(x - y - 2) \quad \text{منه :}$$

$$2 - \text{النقطة ذات اللاحقة } \alpha \text{ تنتمي إلى محور الفواصل يكافئ } \alpha \in R$$

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha & \bar{\alpha} & \text{يكافئ} \\
 \alpha - \alpha & 0 & \text{يكافئ} \\
 2i(x - y - 2) & 0 & \text{يكافئ} \\
 x - y - 2 & 0 & \text{يكافئ} \\
 y = x - 2 & & \text{يكافئ}
 \end{array}$$

يكافئ النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$

التمرين - 80

$z = x + iy$ عدد مركب يكتب على شكله الجبري

$$\alpha = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

1 - أكتب α على شكله الجبري .

2 - هل يوجد عدد مركب z يحقق $\alpha = z$ ؟

الحل - 80

$$\alpha = 2(x - iy) - 2 + 6i \quad \text{--- 1}$$

$$= 2x - 2iy - 2 + 6i$$

$$\alpha = (2x - 2) + i(6 - 2y) \quad \text{شكل جبري لـ } \alpha$$

$$(2x - 2) + i(6 - 2y) = x + iy \quad \alpha = z \text{ يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2 = x \\ 6 - 2y = y \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$z = 2 + 2i \quad \text{يكافئ}$$

إذن : المعادلة $\alpha = z$ تقبل حلا وحيدا هو $z = 2 + 2i$

التمرين - 81

في المستوي المركب M نقطة لاحتفتها العدد المركب z حيث $z = x + iy$ (x, y عدنان حقيقيان)

$$L = \frac{5z - 2}{z - 1}$$

نرفق بكل عدد مركب z حيث $z \neq 1$ العدد المركب L المعروف بـ

1 - أكتب $L + \bar{L}$ بدلالة z و \bar{z}

2 - برهن أن : L عدد تخيلي صرف يكافئ M نقطة من دائرة باستثناء نقطة

الحل - 81

$$L + \bar{L} = \frac{5z - 2}{z - 1} + \frac{5\bar{z} - 2}{\bar{z} - 1} \quad \text{--- 1}$$

$$= \frac{5z\bar{z} - 5z - 2\bar{z} + 2 + 5z\bar{z} - 5\bar{z} - 2z + 2}{z\bar{z} - z - \bar{z} + 1}$$

$$= \frac{10z\bar{z} - 7z - 7\bar{z} + 4}{z\bar{z} - z - \bar{z} + 1}$$

$$L + \bar{L} = \frac{10z\bar{z} - 7(z + \bar{z}) + 4}{z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 1}$$

نتيجة :

$$L = -\bar{L} \quad \text{2 - } L \text{ عدد تخيلي صرف يكافئ}$$

$$L + \bar{L} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{10z\bar{z} - 7(z + \bar{z}) + 4}{z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 1} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10z\bar{z} - 7(z + \bar{z}) + 4 = 0 \\ z \neq 1 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \text{ و } z\bar{z} = |z|^2 \text{ لأن } 10(x^2 + y^2) - 7(2x) + 4 = 0 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{14}{10}x + \frac{4}{10} - 0 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + y^2 + \frac{2}{5} = 0 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100} \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

يكافئ M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $w(7/10; 0)$ و نصف القطر $R = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$ باستثناء النقطة $A(1; 0)$ لأن $z \neq 1$

التمرين - 82

حل في C المعادلة $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$

الحل - 82

ليكن $z = x + iy$ على شكله الجبري

$$x + iy = 2(x - iy) - 2 + 6i \quad \text{يكافئ} \quad z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

$$x + iy = 2x - 2iy - 2 + 6i \quad \text{يكافئ}$$

$$x + iy - 2x + 2iy + 2 - 6i = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$(-x + 2) + i(3y - 6) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} -x + 2 = 0 \\ 3y - 6 = 0 \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x = 2 \\ y = 2 \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

يكافئ $z = 2 + 2i$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

التمرين - 83

حل في C المعادلات التالية :

$$|z|^2 + \bar{z}^2 = 8 - 4i \quad -1$$

$$z\bar{z} - 5\bar{z} - 5(1 + 3i) = 0 \quad -2$$

الحل - 83

ليكن $z = x + iy$ على شكله الجبري

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad |z|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{إذن :}$$

$$x^2 + y^2 + (x - iy)^2 = 8 - 4i \quad \text{يكافئ} \quad |z|^2 + \bar{z}^2 = 8 - 4i \quad -1$$

$$x^2 + y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 = 8 - 4i \quad \text{يكافئ}$$

$$2x^2 - 2xyi = 8 - 4i \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 = 8 \\ 2xy = 4 \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 = 4 \\ y = \frac{4}{2x} \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x = -2 \quad \text{أو} \quad x = 2 \\ y = 2/x \end{aligned} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \text{ و } x = 2 \\ \text{أو} \\ y = -1 \text{ و } x = -2 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 2 + i \\ \text{أو} \\ z = -2 - i \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

نتيجة : المعادلة تقبل حلين هما : $\{2 + i; -2 - i\}$

$$x^2 + y^2 - 5(x - i y) = 5(1 + 3 i) \quad \text{يكافئ} \quad z \bar{z} - 5 \bar{z} - 5(1 + 3 i) = 0 \quad - 2$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 5i y = 5 + 15i \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5x = 5 \\ 5y = 15 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5x - 5 = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 9 - 5x - 5 = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x - 4)(x - 1) = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \{1; 4\} \\ y = 3 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3 \text{ و } x = 1 \\ \text{أو} \\ y = 3 \text{ و } x = 4 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 1 + 3i \\ \text{أو} \\ z = 4 + 3i \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

نتيجة : المعادلة تقبل حلين هما : $\{1 + 3i; 4 + 3i\}$

التمرين - 84

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 - (2 - 3i)z^2 + 9z - 18 + 27i$

1 - أكتب $\overline{p(z)}$ بدلالة \bar{z}

2 - عين العدد المركب α الذي يحقق $p(\alpha) = 0$ و $p(\bar{\alpha}) = 0$ ثم استنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$ في C

الحل - 84

$$\overline{p(z)} = \overline{z^3 - (2 - 3i)z^2 + 9z - 18 + 27i}$$

$$= \bar{z}^3 - (2 + 3i)\bar{z}^2 + 9\bar{z} - 18 - 27i \quad - 1$$

2 - ليكن α عدد مركب .

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots \alpha^3 - (2 - 3i)\alpha^2 + 9\alpha - 18 + 27i = 0 \\ (2) \dots\dots \bar{\alpha}^3 - (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 18 - 27i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{يكافئ} \quad p(\alpha) = 0 \\ \quad \quad \quad p(\bar{\alpha}) = 0 \end{array}$$

لكن إذا كان $p(\alpha) = 0$ فإن $\overline{p(\alpha)} = 0$

$$(3) \dots\dots\dots \bar{\alpha}^3 - (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 18 - 27i = 0 \quad \text{إذن :}$$

ب طرح (3) من (2) نحصل على : $-(2 - 3i)\bar{\alpha}^2 + 27i + (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 27i = 0$

$$\bar{\alpha}^2(-2 + 3i + 2 + 3i) + 54i = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\bar{\alpha}^2(6i) + 54i = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{-54i}{6i} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -9 & \text{أي :} \\ \bar{\alpha} &= -3i \text{ أو } \alpha = 3i & \text{أي :} \\ \alpha &= -3i \text{ أو } \alpha = 3i & \text{أي :} \end{aligned}$$

هل $\alpha = 3i$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$(3i)^3 - (2-3i)(3i)^2 + 9(3i) - 18 + 27i = -27i + 18 - 27i + 27i - 18 + 27i = 0$$

إذن : $\alpha = 3i$ يحقق المعادلة (1)

هل $\alpha = -3i$ يحقق المعادلة (1)

$$(-3i)^3 - (2-3i)(-3i)^2 + 9(-3i) - 18 + 27i = 27i + 18 - 27i - 27i - 18 + 27i = 0$$

إذن : $\alpha = -3i$ يحقق المعادلة (1)

نتيجة : العدد المركب α الذي يحقق $p(\bar{\alpha}) = p(\alpha) = 0$ هو $\alpha = 3i$ أو $\alpha = -3i$
إستنتاج الحل :

لدينا : $p(3i) = 0$ و $p(-3i) = 0$

إذن : $p(z)$ يحل إلى : $(z-3i)(z+3i)(z-\beta)$ حيث $\beta \in \mathbb{C}$

$$p(z) = (z-3i)(z+3i)(z-\beta) \quad \text{أي :}$$

$$p(z) = (z^2+9)(z-\beta) \quad \text{أي :}$$

$$z-\beta = \frac{p(z)}{z^2+9} \quad \text{منه :}$$

يمكن أن نبحث عن $(z-\beta)$ إما بالقسمة الاقليدية أو المطابقة .

نستعمل القسمة الاقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (2-3i)z^2 + 9z - 18 + 27i & z^2 + 9 \\ \hline z^3 + 0 + 9z & \cancel{z^2 + 9} \\ \hline 0 - (2-3i)z^2 + 0 - 18 + 27i & \\ - (2-3i)z^2 & - 18 + 27i \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

نتيجة : $p(z) = (z^2+9)[z-(2-3i)]$

$$\left. \begin{aligned} z^2+9 &= 0 \\ \text{أو} \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } p(z) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$z-(2-3i) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} z &= -3i \text{ أو } z = 3i \\ z &= 2-3i \text{ أو } \end{aligned} \right\} \text{ يكافئ}$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي : $\{3i; -3i; 2-3i\}$

التمرين 85

من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 نضع

نضع $z = x+iy$ و $T = X+iY$ الشكل المركب T و z (و T)

1 - أحسب كل من X و Y بدلالة x و y

2 - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون T حقيقيا .

3 - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون T تخيليا صرفا .

الحل - 85

$$T = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}} \quad \text{1 - ليكن } (x; y) \neq (-1; 0)$$

$$= \frac{2+x-iy}{1+x-iy} \times \frac{1+x+iy}{1+x+iy}$$

$$= \frac{(2+x)(1+x) + (2+x)yi - (1+x)yi + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$\frac{2 + 2x + x + x^2 + y^2 + iy(2 + x - 1 - x)}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1 + x)^2 + y^2} + \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} i$$

$$Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} \quad \text{و} \quad X = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1 + x)^2 + y^2} \quad \text{إذن :}$$

$$Y = 0 \quad \text{حقيقي يكافئ} \quad T = 2$$

$$\frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$y = 0 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : مجموعة النقط M حتى يكون T حقيقي هي المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ ماعدا النقطة $w(-1; 0)$

$$X = 0 \quad \text{تخلي صفر يكافئ} \quad T = 3$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1 + x)^2 + y^2} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 3x + 2 &= 0 \\ (x; y) &\neq (-1; 0) \end{aligned} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\ (x; y) &\neq (-1; 0) \end{aligned} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4} \\ (x; y) &\neq (-1; 0) \end{aligned} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

إذن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $w(-\frac{3}{2}; 0)$ و نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ماعدا النقطة ذات الاحداثيات $(-1; 0)$

التمرين - 86

A, B, C نقط من المستوي لواقعها على الترتيب $i\sqrt{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1 - عين z_G لاحقة النقطة G مرجع الجملة $\{(A; -3); (B; 1 + \sqrt{6}); C(1 - \sqrt{6})\}$

2 - بين أن G هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

الحل - 86

$$z_G = \frac{-3(i\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{6})(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1 - \sqrt{6})(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{-3 + 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6}} \quad -1$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i}{-1}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + 1 + i\sqrt{18}}{-1}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + 1 + 3i\sqrt{2}}{-1}$$

$$= -1$$

منه : احداثيات النقطة G هي $G(-1; 0)$

$$\|\vec{GA}\| = |i\sqrt{2} - (-1)| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \quad -2$$

$$\|\vec{GB}\| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1) \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{GC}\| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1) \right| = \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

إن : A ، B ، C هي نقط من الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{3}$
 منه : G هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين - 87

u و v عدنان مركبان غير حقيقيان . نضع
 $z = \frac{u - \bar{u}v}{1 - v}$ برهن أن z حقيقي يكافئ $|v| = 1$

الحل - 87

z حقيقي يكافئ

$$\overline{\left(\frac{u - \bar{u}v}{1 - v} \right)} = \frac{\bar{u} - u\bar{v}}{1 - \bar{v}}$$

يكافئ

$$\frac{\bar{u} - u\bar{v}}{1 - \bar{v}} = \frac{u - \bar{u}v}{1 - v}$$

يكافئ

$$(\bar{u} - u\bar{v})(1 - v) = (1 - \bar{v})(u - \bar{u}v)$$

يكافئ

$$\bar{u} - \bar{u}v - u\bar{v} + u\bar{v}v = u - \bar{u}v - u\bar{v} + \bar{u}v\bar{v}$$

يكافئ

$$\bar{u} + u\bar{v}v = u + \bar{u}v\bar{v}$$

يكافئ

$$\bar{u} + u\bar{v}v - u - \bar{u}v\bar{v} = 0$$

يكافئ

$$u(v\bar{v} - 1) - \bar{u}(v\bar{v} - 1) = 0$$

يكافئ

$$(v\bar{v} - 1)(u - \bar{u}) = 0$$

يكافئ

$$(u - \bar{u}) \neq 0 \text{ لأن } v\bar{v} - 1 = 0 \text{ ليس حقيقي}$$

يكافئ

$$v\bar{v} = |v|^2 \text{ لأن } |v|^2 - 1 = 0$$

يكافئ

$$|v|^2 = 1$$

يكافئ

$$|v| = 1$$

يكافئ

التمرين - 88

a و b عدنان مركبان حيث $|a| = |b| = 1$ و $ab \neq -1$

$$z = \frac{a+b}{1+ab} \text{ نضع}$$

عبر عن \bar{z} بدلالة a و b ثم استنتج أن z حقيقي

الحل - 88

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab} \right)} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a}\bar{b}}$$

$$\bar{a} = \frac{1}{a}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{b}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{a} \\ \bar{b} &= \frac{1}{b} \end{aligned} \right\} \text{ لأن } \left. \begin{aligned} a\bar{a} &= |a|^2 = 1 \\ b\bar{b} &= |b|^2 = 1 \end{aligned} \right\} \text{ لكن}$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} = \frac{a+b}{ab} \times \frac{ab}{1+ab} = \frac{a+b}{1+ab} \text{ منه :}$$

نتيجة : $\bar{z} = z$ إذن : $z \in \mathbb{R}$

التمرين - 89

α عدد مركب غير معدوم طريلته R و عمدته θ

نعتبر العددين المركبين $z = \alpha i$ ، $t = \alpha^2$

1 - أحسب بدلالة R و θ طولية ثم عمدة كل من z و t

2 - حدد قيم R و θ حتى يكون z و t مترافقين .

الحل - 89

$$\left. \begin{aligned} |z| &= |\alpha| \times |i| = R \\ \text{Arg}(z) &= \text{Arg}(\alpha) + \text{Arg}(i) = \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } z = \alpha i$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \alpha \cdot R^2 \\ \text{Arg}(t) &= 2 \text{Arg}(\alpha) + 2\theta \end{aligned} \right\} : \alpha \neq 0$$

يكون z و t مترافقين إذا و فقط إذا كان

$$\left. \begin{aligned} R &= R' \\ 2\theta &= \theta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned} \right\} \text{ أي } k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } 2\theta = \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k$$

$$\left. \begin{aligned} R(R-1) &= 0 \\ 2\theta &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned} \right\} \text{ أي } R=0 \text{ لأن } R \neq 0 \text{ (غير معنوم)}$$

$$\left. \begin{aligned} R &= 1 \\ 3\theta &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned} \right\} \text{ أي } k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \theta = -\frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3}k$$

إذن : قيم R و θ هي كمايلي : $R=1$ و $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3}k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين - 90

A, B, C نقط من المستوي لواحققها على الترتيب $z_1=1, z_2=2i, z_3=-1-i$
1 - احسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$

2 - احسب $\text{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$

3 - استنتج طبيعة المثلث ABC

الحل - 90

1 - لدينا : $z_2-z_1=2i-1$ و $z_3-z_1=-1-i-1=-2-i$

إذن : $|z_2-z_1|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ و $|z_3-z_1|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} &= \frac{-1+2i}{-2-i} \times \frac{-2+i}{-2+i} \\ &= \frac{2-i-4i-2}{4+1} \\ &= -i \end{aligned} \quad -2$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$AB=AC \quad \text{إذن : } |z_2-z_1|=|z_3-z_1| \quad -3$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \quad \text{إذن : } \text{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

نتيجة : المثلث ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A

التمرين - 91

في كل حالة من الحالات التالية أثبت أن العدد z حقيقي .

$$z = (3-i\sqrt{3})^{12n} - 3 \quad z = (-2-2i)^{8n} \quad -1$$

$$z = (-1+i\sqrt{3})^{3n} \quad -2$$

ملاحظة : n عدد طبيعي .

الحل - 91

$$-2-2i = -2(1+i) \quad -1$$

$$= -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(-2-2i)^{8n} = (-2\sqrt{2})^{8n} \times \left[\cos 8n \frac{\pi}{4} + i \sin 8n \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{منه :}$$

$$(2\sqrt{2})^{8n} \times [\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n]$$

$$z \in \mathbb{R} : \text{إذن} = (2\sqrt{2})^{8n}$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right] \quad -2$$

$$= 2 \left[\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$(-1 + i\sqrt{3})^{3n} = 2^{3n} \times \left[\cos 2\frac{\pi}{3} + i \sin 2\frac{\pi}{3} \right]^{3n} \quad \text{إذن :}$$

$$= 2^{3n} \left[\cos\left(2\frac{\pi}{3} \times 3n\right) + i \sin\left(2\frac{\pi}{3} \times 3n\right) \right]$$

$$= 8^n \times [\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n]$$

$$z \in \mathbb{R} : \text{إذن} = 8^n$$

$$3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \quad -3$$

$$(3 - i\sqrt{3})^{12n} = (2\sqrt{3})^{12n} \times \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]^{12n} \quad \text{إذن :}$$

$$= (2\sqrt{3})^{12n} \times \left[\cos\left(-\frac{12n\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{12n\pi}{6}\right) \right]$$

$$= (2\sqrt{3})^{12n} \times [\cos(-2\pi n) + i \sin(-2\pi n)]$$

$$z \in \mathbb{R} : \text{إذن} = (2\sqrt{3})^{12n}$$

التمرين = 92

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{عدد مركب حيث}$$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $z^{6n+1} = z$

الحل = 92

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z^{6n+1} = z \times z^{6n}$$

منه :

$$= z \times \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]^{6n}$$

$$= z \times \left[\cos \frac{6\pi n}{3} + i \sin \frac{6\pi n}{3} \right]$$

$$= z(\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n)$$

$$= z$$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين 1 =

لتكن في C المعادلة $z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$ (1) ذات المجهول z حيث α عدد مركب غير معدوم طويلته R و عديته θ .

1 - حل في C المعادلة (1)

2 - أحسب طويته و عديته حلي المعادلة (1) بدلالة R و θ

3 - حدد قيم R و θ حتى يكون الحلان مترافقان .

الحل 1 =

$$\Delta = \alpha^2(\alpha + i)^2 - 4i\alpha^3$$

$$= \alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha i - 1) - 4i\alpha^3$$

$$= \alpha^4 + 2i\alpha^3 - \alpha^2 - 4i\alpha^3$$

$$= \alpha^4 - 2i\alpha^3 - \alpha^2$$

$$= \alpha^2(\alpha^2 - 2i\alpha - 1)$$

$$= \alpha^2(\alpha - i)^2$$

$$= [\alpha(\alpha - i)]^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\alpha(\alpha + i) - \alpha(\alpha - i)}{2} = \frac{\alpha(\alpha + i - \alpha + i)}{2} = \frac{2i\alpha}{2} = i\alpha \\ z_2 = \frac{\alpha(\alpha + i) + \alpha(\alpha - i)}{2} = \frac{\alpha(\alpha + i + \alpha - i)}{2} = \frac{2\alpha^2}{2} = \alpha^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_2| = |\alpha^2| = |\alpha|^2 = R^2 \\ \text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(\alpha^2) = 2 \text{Arg}(\alpha) = 2\theta \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} |z_1| = |\alpha| = R \\ \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \theta \end{cases} \quad -2$$

$$3 - \text{الحلان مترافقان يكافئ} \quad \left. \begin{array}{l} R^2 = R \\ 2\theta = -\frac{\pi}{2} - \theta + 2\pi k \end{array} \right\} \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} R(R - 1) = 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} R = 1 \text{ لأن } R \neq 0 \text{ (}\alpha \text{ غير معدوم)} \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

التمرين 2 =

لتكن في C المعادلة $\alpha z^2 + (1 - i\alpha^2)z - i\alpha = 0$ (1) ذات المجهول المركب z و α عدد مركب غير معدوم

1 - أنشر العبارة $(1 + i\alpha^2)^2$ ثم حل في C المعادلة (1)

2 - ليكن $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$, أحسب طويته و عديته حلي المعادلة (1)

الحل 2 =

$$(1 + i\alpha^2)^2 = 1 + 2i\alpha^2 - \alpha^4$$

$$\Delta = (1 - i\alpha^2)^2 + 4i\alpha^2$$

$$= 1 - 2i\alpha^2 - \alpha^4 + 4i\alpha^2$$

$$= 1 + 2i\alpha^2 - \alpha^4$$

حسب السؤال السابق $-(1 + i\alpha^2)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-1 + i\alpha^2}{2\alpha} = \frac{-2}{2\alpha} - \frac{-1}{\alpha} \\ z_2 = \frac{-1 + i\alpha^2 + 1 + i\alpha^2}{2\alpha} = \frac{2i\alpha^2}{2\alpha} = i\alpha \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} |z_1| = \left| \frac{-1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|} \\ \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}\left(\frac{-1}{\alpha}\right) = \text{Arg}(-1) - \text{Arg}(\alpha) = \pi - \text{Arg}(\alpha) \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} |z_2| = |i\alpha| = |\alpha| \\ \text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(i) + \text{Arg}(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3+1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right] = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right] \end{cases} \quad \text{من أجل } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + i) \text{ فإن :}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Arg}(z_1) &= \pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{Arg}(z_2) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad |z_2| = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad \text{نتيجة :} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} \\ \text{Arg}(\alpha) &= \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad \text{مه}$$

التمرين 3

R عدد حقيقي موجب تماما . و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب غير معدوم طريلته R و عمدته θ

1 - حل في مجموعة الاعداد المركبة C المعادلة $z^2 - \alpha z + \alpha^2 = 0$ ذات المجهول z

2 - عبر بدلالة R و θ عن طولية و عمدة كل من الحلين .

الحل - 3

$$\Delta = \alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2 = (i\alpha\sqrt{3})^2 \quad -1$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\alpha - i\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha}{2} (1 - i\sqrt{3}) \\ z_2 = \frac{\alpha + i\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha}{2} (1 + i\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$|z_1| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| \times |1 - i\sqrt{3}| = \frac{R}{2} \sqrt{1+3} = R \quad -2$$

$$|z_2| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| \times |1 + i\sqrt{3}| = \frac{R}{2} \sqrt{1+3} = R$$

$$\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(\alpha) + \text{Arg}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta + \text{Arg}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \theta - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(\alpha) + \text{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta + \text{Arg}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \theta + \frac{\pi}{3}$$

التمرين 4

θ عدد حقيقي .

لتكن المعادلة $z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0$ ذات المجهول المركب z

1 - عين حلول المعادلة (1) بدلالة θ

2 - عين حلول المعادلة (1) من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$

الحل - 4

$$\Delta = (1 + i \sin 2\theta)^2 - 4\left(\frac{i}{2} \sin 2\theta\right) \quad -1$$

$$\frac{1 + 2i \sin 2\theta - \sin^2 2\theta - 2i \sin 2\theta}{1 - \sin^2 2\theta} = \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2 2\theta}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1 + i \sin 2\theta}{2} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{i}{2} \sin 2\theta \\ z_2 = \frac{1 + i \sin 2\theta + \cos 2\theta}{2} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{i}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin 2\theta &= \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ من أجل } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases} \text{ منه :}$$

التمرين 5

حل في مجموعة الأعداد المركبة C كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ (1)

و $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$ (2)

لتكن النقط A ، B ، C ، D لواحقتها على الترتيب $1 + 2i$ ، $1 + \sqrt{3} + i$ ، $1 - 2i$ و $1 + \sqrt{3} - i$

1 - ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

2 - أكتب معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

3 - أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C)

الحل - 5

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2 \quad : \quad z^2 - 2z + 5 = 0 \quad -1$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i \\ z_2 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(1 + \sqrt{3})^2 - 4(5 + 2\sqrt{3}) : z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0 \\ &= 4 + 8\sqrt{3} + 12 - 20 - 8\sqrt{3} \\ &= -4 \\ &= (2i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2(1 + \sqrt{3}) - 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} - i \\ z_2 = \frac{2(1 + \sqrt{3}) + 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} + i \end{cases}$$

2 - لنحسب AB^2 ، AC^2 ، BC^2 كمايلي :

$$AB^2 = |1 + \sqrt{3} + i - 1 - 2i|^2 = |\sqrt{3} - i|^2 = 3 + 1 = 4$$

$$AC^2 = |1 - 2i - 1 - 2i|^2 = |-4i|^2 = 16$$

$$BC^2 = |1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i|^2 = |-\sqrt{3} - 3i|^2 = 3 + 9 = 12$$

نتيجة : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ إذن : حسب فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B

3 - نعلم أن في المثلث القائم مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي منتصف الوتر في هذه الحالة هي منتصف [AC]

$$\text{و نصف قطرها هو نصف طول الوتر أي } \frac{AC}{2} \text{ و في هذه الحالة } \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{1 + 2i + 1 - 2i}{2} = 1$$

لنبحث إذن عن المركز :

إذن : المركز هو $w(1; 0)$

$$(x - 1)^2 + y^2 = (2)^2$$

منه : معادلة الدائرة (C) :

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{أي :}$$

4 - هل إحداثيات النقطة D تحقق معادلة الدائرة (C) ؟

$$\text{لدينا } D(1 + \sqrt{3}; -1)$$

$$\text{إذن : } (1 + \sqrt{3})^2 + (-1)^2 - 2(1 + \sqrt{3}) - 3 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2 - 2\sqrt{3} - 3 = 0$$

= 0 إذن : فعلا D تنتمي إلى الدائرة (C)

التمرين - 6

θ عدد حقيقي

1 - حل في C المعادلة $z^2 - 2z \sin \theta + 1 = 0$ (1) ذات المجهول z

لتكن A و B لاحقتاهما حلول المعادلة (1). و لتكن O مبدأ المعظم

2 - عين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع

الحل - 6

$$\Delta = 4 \sin^2 \theta - 4 = -4(1 - \sin^2 \theta) = -4 \cos^2 \theta = (2i \cos \theta)^2 \quad -1$$

$$z_1 = \frac{2 \sin \theta - 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta - i \cos \theta$$

$$z_2 = \frac{2 \sin \theta + 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta + i \cos \theta$$

2 - يكون ABC مثلث متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $OA^2 = OB^2 = AB^2$

لتكن A ، B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 إذن :

$$OA^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$OB^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$AB^2 = |z_2 - z_1|^2$$

$$= |2i \cos \theta|^2$$

$$= 4 \cos^2 \theta$$

نتيجة : يكون ABC مثلث متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $AB = 1$

$$\text{أي : } 4 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4} \quad \text{أي}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{2} \quad \text{أو} \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

$$\text{أي } \theta = \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{-\pi}{3} + \pi k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

التمرين - 7

لتكن في C المعادلة $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ (1)

1 - تحقق أن 2 هو حل للمعادلة (1)

2 - عين العددين المركبين a و b حيث : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z - 2)(z^2 + az + b)$

3 - حل في C المعادلة (1)

الحل - 7

$$(2)^3 + 2(2)^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0 \quad -1$$

إذن : فعلا 2 هو حل للمعادلة (1)

2 - للبحث عن a و b يمكن استعمال المطابقة أو القسمة الإقليدية كمايلي :

$$z^3 + 2z^2 - 16 = (z - 2)(z^2 + az + b) \quad \text{إذن : } \frac{z^3 + 2z^2 - 16}{z - 2} = z^2 + az + b$$

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 + 2z^2 - 16 & z^2 + 4z + 8 \\
 \underline{z^3 + 2z^2} & \\
 4z^2 - 16 & \\
 \underline{4z^2 + 8z} & \\
 8z - 16 & \\
 \underline{8z + 16} & \\
 0 &
 \end{array}$$

نتيجة : $a = 4$ و $b = 8$

$$z^3 + 2z^2 - 16 = (z - 2)(z^2 + 4z + 8) \quad \text{أي :}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 2 \\ \text{أو} \\ z^2 + 4z + 8 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{المعادلة (1) تكافئ} \\ \text{(2)} \end{array}$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2 \quad \text{لنحل المعادلة (2) في C :}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i \\ z_2 = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة (1) هي $\{2; -2 - 2i; -2 + 2i\}$ التمرين 8

$$1 - \text{حل في C المعادلة } z^2 + z + 1 = 0$$

$$2 - \text{استنتج حلول المعادلة } z^3 - 1 = 0 \text{ في C}$$

$$3 - \text{نضع } u = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$(أ) \text{ أحسب } u^{2008}, u^3, u^2$$

$$(ب) \text{ أحسب } S = u + u^2 + u^3 + \dots + u^{2008}$$

الحل 8

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2 \quad 1 - z^2 + z + 1 = 0 :$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$2 - z^3 - 1 = 0 \quad \text{تكافئ } (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{تكافئ}$$

$$\text{إذن : حلول المعادلة } z^3 - 1 = 0 \text{ هي } \left\{ 1; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$3 - (أ) u = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{إذن : } u^2 = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^2 = \cos 4\frac{\pi}{3} + i\sin 4\frac{\pi}{3} = \bar{u} \quad \text{حيث } \bar{u} \text{ هو مرافق } u$$

$$u^3 = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$$\begin{aligned} u^{2008} &= \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^{2008} = \cos 4016\frac{\pi}{3} + i\sin 4016\frac{\pi}{3} \\ &= \cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3} = u \end{aligned}$$

(ب) ليكن n عدد طبيعي نميز الحالات التالية :

$$u^n = u^{3k} = (u^3)^k = 1^k = 1 \quad \text{منه} \quad n = 3k$$

$$u^n = u^{3k+1} = u^{3k} \times u = u \quad \text{منه} \quad n = 3k + 1$$

$$u^n = u^{3k+2} = u^{3k} \times u^2 = \bar{u} \quad \text{منه} \quad n = 3k + 2$$

نتيجة :

$$S = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \dots + u^{2005} + u^{2006} + u^{2007} + u^{2008}$$

$$= (u + \bar{u} + 1) + (u + \bar{u} + 1) + \dots + (u + \bar{u} + 1) + u$$

$$= \frac{2007}{3} (u + \bar{u} + 1) + u$$

$$= 669(u + \bar{u} + 1) + u$$

$$= 669\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + u$$

$$= 669(0) + u$$

$$= u$$

$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

التمرين 9 p كثير حدود للمتغير المركب، z معرف بـ $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ 1 - عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

2 - حل في C المعادلة $p(z) = 0$ الحل 9

$$(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a) = z^4 + 4z^3 + 2az^2 + az^3 + 4az^2 + 2a^2z + bz^2 + 4bz + 2ba \quad - 1$$

$$= z^4 + z^3(4+a) + z^2(6a+b) + z(2a^2+4b) + 2ab$$

بالمطابقة مع عبارة $p(z)$ نحصل على

$$\left. \begin{aligned} 4+a &= 0 \\ 6a+b &= -19 \\ 2a^2+4b &= 52 \\ 2ab &= -40 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= -19 - 6a \end{aligned} \right\}$$

$$b = \frac{52 - 2a^2}{4}$$

$$b = \frac{-40}{2a}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= -19 + 24 \end{aligned} \right\}$$

$$b = \frac{52 - 32}{4}$$

$$b = \frac{-40}{-8}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} b &= 5 \\ b &= 5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 5 \end{aligned} \right\}$$

أي

أي

أي

أي

نتيجة : $p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \dots\dots\dots z^2 - 4z + 5 = 0 \\ (\beta) \dots\dots\dots z^2 + 4z - 8 = 0 \end{array} \right\} \text{أو يكافئ } p(z) = 0 \quad -2$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2 \quad \text{حل المعادلة } (\alpha) :$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \\ z_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \end{cases}$$

$$\Delta = 16 + 32 = 48 = (4\sqrt{3})^2 \quad \text{حل المعادلة } (\beta) :$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3} \\ z_2 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ في C هي : $\{-2 - 2\sqrt{3}; -2 + 2\sqrt{3}; 2 - i; 2 + i\}$

التمرين 10

1 - حل في C المعادلة $z^4 - 1 = 0$

2 - استنتج حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ في C

الحل 10

$$z^4 - 1 = 0 \quad -1 \quad \text{يكافئ } (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} z^2 - 1 = 0 \\ z^2 + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{أو يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = -1 \text{ أو } z = 1 \\ z = -i \text{ أو } z = i \end{array} \right\} \text{أو يكافئ}$$

إذن : حلول المعادلة $z^4 - 1 = 0$ هي $\{1; -1; i; -i\}$

$$2 - \text{نضع } t = \frac{2z+1}{z-1} \text{ مع } z \neq 1$$

إذن : المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ تكافئ $t^4 - 1 = 0$
تلك هي $t = 1$ أو $t = -1$ أو $t = i$ أو $t = -i$

$$\frac{2z+1}{z-1} = 1 \quad \text{الحالة (1) } t = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{array}{ll} 2z + 1 = z - 1 & \text{أي :} \\ z = -2 & \text{أي :} \end{array}$$

$$\frac{2z+1}{z-1} = -1 \quad \text{الحالة (2) } t = -1 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{array}{ll} 2z + 1 = -z + 1 & \text{أي :} \\ 3z = 0 & \text{أي :} \\ z = 0 & \text{أي :} \end{array}$$

$$\frac{2z+1}{z-1} = i \quad \text{الحالة (3) } t = i \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{array}{ll} 2z + 1 = i(z - 1) & \text{أي :} \\ z(2 - i) = -1 - i & \text{أي :} \\ z = \frac{-1 - i}{2 - i} & \text{أي :} \end{array}$$

$$z = \frac{-1-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{-2-i-2i+1}{4+1} \quad \text{أي}$$

$$z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{أي}$$

$$\frac{2z+1}{z-1} = -i \quad \text{الحالة } t = -i \text{ أي}$$

$$2z+1 = -iz+i \quad \text{أي :}$$

$$z(2+i) = -1+i \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{-1+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{-2+i+2i+1}{4+1} \quad \text{أي}$$

$$z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \quad \text{أي}$$

خلاصة : حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ هي $\left\{-2; 0; -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i; -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$

التمرين 11

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1 - α عدد حقيقي . عبر بدلالة α عن الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد $p(i\alpha)$

2 - عين قيم α حتى يكون $p(i\alpha) = 0$

3 - عين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z^2 + 9)(z^2 + bz + c)$

4 - حل في C المعادلة $p(z) = 9$

الحل 11

$$p(i\alpha) = (i\alpha)^4 - 10(i\alpha)^3 + 38(i\alpha)^2 - 90(i\alpha) + 261 \quad -1$$

$$= \alpha^4 + 10i\alpha^3 - 38\alpha^2 - 90i\alpha + 261$$

$$= \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 + i(10\alpha^3 - 90\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}[p(i\alpha)] &= \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 \\ \operatorname{Im}[p(i\alpha)] &= 10\alpha^3 - 90\alpha \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$(1) \dots \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 = 0 \dots (1) \quad p(i\alpha) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$(2) \dots 10\alpha^3 - 90\alpha = 0 \dots (2)$$

نحل المعادلة (2) : $10\alpha^3 - 90\alpha = 0$ تكافئ $10\alpha(\alpha^2 - 9) = 0$

تكافئ $\alpha \in \{0; 3; -3\}$

هل $\alpha = 0$ حل للمعادلة (1) ؟ $0 - 0 + 261 \neq 0$ إذن : $\alpha = 0$ مرفوض

هل $\alpha = 3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 342 + 261 = 0$ إذن : $\alpha = 3$ مقبول

هل $\alpha = -3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 342 + 261 = 0$ إذن : $\alpha = -3$ مقبول

خلاصة : $p(i\alpha) = 0$ تكافئ $\alpha = 3$ أو $\alpha = -3$

$$z^2 + bz + c = \frac{p(z)}{z^2 + 9} \quad \text{يكافئ} \quad p(z) = (z^2 + 9)(z^2 + bz + c) \quad -3$$

لنجري القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 & z^2 + 9 \\ \underline{z^4 \quad + \quad 9z^2} & \\ 0 - 10z^3 + 29z^2 - 90z + 261 & \\ \underline{-10z^3 \quad \quad -90z} & \\ 0 \quad + 29z^2 + 0 \quad + 261 & \\ \underline{29z^2 \quad \quad + 261} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\text{نتيجة : } z^2 + bz + c = z^2 - 10z + 29$$

$$\text{أي } b = -10 \text{ و } c = 29$$

$$\left. \begin{array}{l} z^2 + 9 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 10z + 29 = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ } p(z) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} z \in \{3i; -3i\} \\ \text{أو} \\ z^2 - 10z + 29 = 0 \end{array} \right\} \text{يكافئ}$$

$$\Delta = 100 - 116 = -16 = (4i)^2 : z^2 - 10z + 29 = 0 \text{ لحل المعادلة}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{10-4i}{2} = 5-2i \\ z_2 = \frac{10+4i}{2} = 5+2i \end{cases}$$

خلاصة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{3i; -3i; 5-2i; 5+2i\}$

التمرين 12

- 1 - أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $1-i$
- 2 - حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $\frac{(-1-3i)z+3+i}{z-1} = z$ حيث z_0 هو الحل الذي له أصغر طولية .
- 3 - أحسب العدد $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ و أكتبه على شكله الجبري .
- 4 - ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا

الحل 12

$$1-i = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right] \quad -1$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\frac{(-1-3i)z+3+i}{z-1} = z \quad \text{يكافئ} \quad z^2 - z = (-1-3i)z + 3 + i \quad \text{مع } z \neq 1$$

$$z^2 + 3iz - 3 - i = 0 \quad \text{مع } z \neq 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$\Delta = -9 - 4(-3-i) = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i = (2+i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-3i-2-i}{2} = -1-2i \\ z_2 = \frac{-3i+2+i}{2} = 1-i \end{cases}$$

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad ; \quad |z_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$z_0 = z_2 = 1-i \quad \text{إذن} \quad |z_1| > |z_2|$$

$$z_0 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{3 - حسب السؤال (1) :}$$

$$\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]^{2008} \quad \text{إذن :}$$

$$= \cos 2008\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin 2008\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos(-502\pi) + i \sin(-502\pi)$$

$$= 1$$

$$\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right) \quad -4$$

$$\text{إذن : يكون } \left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ حقيقيا إذا و فقط إذا كان } \sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{أي } n = 4k \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

التمرين - 13

من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب $L(z)$ المعروف بـ : $L(z) = \frac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz + 2}$

1 - أوجد الأعداد المركبة z حيث $L(z) = z$ ثم أكتبها على شكلها المثلثي

2 - لتكن M نقطة لاحقة z

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا

الحل - 13

ليكن $z \neq 2i$

$$\frac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz + 2} = z \quad \text{تكافئ} \quad L(z) = z - 1$$

$$z(iz + 2) = (5-i)z + 2(1+i) \quad \text{تكافئ}$$

$$iz^2 + 2z - (5-i)z - 2 - 2i = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$iz^2 + z(2-5+i) - 2 - 2i = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$iz^2 + (-3+i)z - 2 - 2i = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\Delta = (-3+i)^2 - 4i(-2-2i)$$

$$= 9 - 6i - 1 + 8i - 8$$

$$= 2i$$

$$= (1+i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{3-i-1-i}{2i} = \frac{1-i}{i} = \frac{1-i}{i} \times \frac{-i}{-i} = -1-i \\ z_2 = \frac{3-i+1+i}{2i} = \frac{4}{2i} = \frac{2}{i} \times \frac{-i}{-i} = -2i \end{cases}$$

نتيجة : الأعداد المركبة z التي تحقق $L(z) = z$ هي $\{-1-i; -2i\}$

$$-1-i = \sqrt{2} \left[\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(5\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{الشكل المثلثي :}$$

$$-2i = 2 \left[\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

2 - ليكن $z = x + iy$ حيث $(x; y) \neq (0; 2)$ لأن $z \neq 2i$

$$L(z) = \frac{(5-i)(x+iy) + 2(1+i)}{i(x+iy) + 2}$$

$$= \frac{5x + 5iy - ix + y + 2 + 2i}{ix - y + 2}$$

$$= \frac{(5x + y + 2) + (5y - x + 2)i}{2 - y + ix} \times \frac{2 - y - ix}{2 - y - ix}$$

$$= \frac{(5x + y + 2)(2 - y) - x(5x + y + 2)i + (5y - x + 2)(2 - y)i + x(5y - x + 2)}{(2 - y)^2 + x^2}$$

$$= \frac{(5x + y + 2)(2 - y) + x(5y - x + 2)}{(2 - y)^2 + x^2} + \frac{(5y - x + 2)(2 - y) - x(5x + y + 2)}{(2 - y)^2 + x^2} i$$

نتيجة : يكون $L(z)$ تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (5x + y + 2)(2 - y) + x(5y - x + 2) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ L(z) \neq 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$10x - 5xy + 2y - y^2 + 4 - 2y + 5xy - x^2 + 2x = 0$$

$$-y^2 - x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 - 36 - 4 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 40 \quad \text{هي معادلة الدائرة (C) التي مركزها النقطة } w(6; 0)$$

الشرط (1) يكافئ

يكافئ

يكافئ

يكافئ

يكافئ

و نصف قطرها $\sqrt{40}$ الشرط (2) يكافئ: $(5-i)z + 2(1+i) \neq 0$ لنحل المعادلة $(5-i)z + 2(1+i) = 0$

$$z = \frac{-2-2i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i}$$

$$= \frac{-10-2i-10-2i}{25+1}$$

$$= \frac{-20-4i}{26}$$

$$= -\frac{4}{13} - \frac{2i}{13}$$

إذن : الشرط (2) يكافئ: $z \neq -\frac{4}{13} - \frac{2i}{13}$ هل النقطة ذات الإحداثيات $(-\frac{4}{13}; -\frac{2}{13})$ تنتمي إلى الدائرة C ؟

$$(-\frac{4}{13}-6)^2 + (-\frac{2}{13})^2 = (\frac{82}{13})^2 + (\frac{2}{13})^2 = \frac{6760}{169} = 40$$

إذن : فعلا النقطة $A(-\frac{4}{13}; -\frac{2}{13})$ تنتمي إلى الدائرة (C)خلاصة : يكون $l(r)$ تحليليا صرعا إذا وفقط إذا كانت M نقطة من الدائرة (C) ذات المركز $w(6; 0)$ و نصفالقطر $\sqrt{40}$ باستثناء النقطتين $B(0; 2)$ و $W(-\frac{4}{13}; -\frac{2}{13})$ **التمرين 14**p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i$ 1 - أحسب $p(1)$ ثم استنتج كثير الحدود $Q(z)$ حيث $p(z) = (z-1)Q(z)$ من أجل كل عدد مركب z2 - حل في C المعادلة $p(z) = 0$ 3 - لتكن A ، B ، C نقط من المستوى لواقعها حلول المعادلة $p(z) = 0$

ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحل 14

$$p(1) = 1 - i + 1 - i - 2 + 2i = 2 - 2i - 2 + 2i = 0 \quad -1$$

$Q(z) = \frac{p(z)}{z-1}$ حيث $z \neq 1$: إذن $p(z) = (z-1)Q(z)$
 لنجري القسمة الانقليدية :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i & z-1 \\ \underline{z^3 - z^2} & \\ (1-i)z^2 + (1-i)z - 2 + 2i & \\ \underline{(1-i)z^2 - (1-i)z} & \\ 2(1-i)z - 2 + 2i & \\ \underline{2(1-i)z - 2 + 2i} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن : $Q(z) = z^2 + (1-i)z + 2(1-i)$

$$p(z) = 0 \quad -2 \quad \left. \begin{array}{l} z-1=0 \\ z^2 + (1-i)z + 2(1-i) = 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} z=1 \\ z^2 + (1-i)z + 2(1-i) = 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ}$$

نحل المعادلة (2) في C :

$$\Delta = (1-i)^2 - 4(2-2i)$$

$$= 1 - 2i - 8 + 8i$$

$$= -7 + 6i$$

$$= (1 + 3i)^2$$

ملاحظة : للبحث عن الجذر التربيعي لـ $-8 + 6i$ نضع $(\alpha + \beta i)^2 = -8 + 6i$

$$\begin{cases} \alpha \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 + 36}}{2}} = \sqrt{\frac{-8 + 10}{2}} = 1 \\ \beta = \frac{6}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{منه : } -8 + 6i = (1 + 3i)^2$$

$$z_1 = \frac{-1 + i - 1 - 3i}{2} = -1 - i \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = \frac{-1 + i + 1 + 3i}{2} = 2i$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{1; 2i; -1-i\}$

3 - لتكن A ، B ، C لواحقها على الترتيب : $1; 2i; -1-i$

$$AB^2 = |2i - 1|^2 = 4 + 1 = 5$$

$$AC^2 = |-1-i-1|^2 = |-2-i|^2 = 4 + 1 = 5$$

$$BC^2 = |-1-i-2i|^2 = |-1-3i|^2 = 1 + 9 = 10$$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{array} \right\}$ إذن : مثلث قائم الزاوية في A

خلاصة : ABC قائم ومتساوي الساقين

التمرين - 15

p كثير حدود للمتغير المركب z معرف كمايلي : $p(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$

1 - تحقق أن $p(2+i) = 0$ ثم عين كثير الحدود Q(z) حيث $p(z) = (z-2-i)Q(z)$

2 - حل في C المعادلة $p(z) = 0$

3 - لتكن A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها حلول المعادلة $p(z) = 0$ حيث $2+i$ هي لاحقة النقطة A

عين احداثيات النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD

الحل - 15

$$\begin{aligned} p(2+i) &= (2+i)^3 - (4+i)(2+i)^2 + (5+4i)(2+i) - 5i \\ &= 2 + 11i - 8 - 19i + 10 + 5i + 8i - 4 - 5i \\ &= 0 \end{aligned} \quad -1$$

$$Q(z) = \frac{p(z)}{z-2-i} \quad \text{إذن : } p(z) = (z-2-i)Q(z)$$

لنجري القسمة الاقليدية :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i & z-2-i \\ \hline z^3 - (2+i)z^2 & z^2 - 2z + 1 + 2i \\ \hline -2z^2 + (5+4i)z - 5i & \\ -2z^2 + (4+2i)z & \\ \hline (1+2i)z - 5i & \\ (1+2i)z - 5i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{نتيجة : } Q(z) = z^2 - 2z + 1 + 2i$$

$$\left. \begin{array}{l} z-2-i=0 \\ z^2-2z+1+2i=0 \end{array} \right\} \text{ - 2 } p(z)=0 \text{ تكافئ}$$

$$(\alpha) \dots \dots \dots z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1+2i) = -8i = (2-2i)^2 \quad \text{نحل المعادلة } (\alpha)$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2-2+2i}{2} = i \\ z_2 = \frac{2+2-2i}{2} = 2-i \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{2+i; i; 2-i\}$

لتكن $z_D; z_C; z_B; z_A$ لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب .

إذن : A هي مرجح الحملة $\{(B; 1); (C; 1); (D; 1)\}$

$$z_B + z_C + z_D = 3 z_A \quad \text{أي} \quad \frac{z_B + z_C + z_D}{3} = z_A \quad \text{منه :}$$

$$z_D = 3 z_A - z_B - z_C \quad \text{إذن :}$$

$$z_D - 3(2+i) - i - (2-i) = 6 + 3i - i - 2 + i = 4 + 3i \quad \text{أي :}$$

نتيجة : أحداثيات النقطة D هي $D(4; 3)$

التمرين - 16

لنكن في C المعادلة $z^3 - (6+i)z^2 + (13+i)z - 10 + 2i = 0$ (E)

1 - أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه

2 - حل في C المعادلة (F) وليكن z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2

3 - عين أحداثيات النقطة G مرجح الجملة $\{(A; -2); (B; 3); (C; 1)\}$

4 - عين المجموعة E_M من نقط المستوي حيث $-2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 9$

الحل - 16

1 - ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha^3 - (6+i)\alpha^2 + (13+i)\alpha - 10 + 2i = 0 \quad \text{حل للمعادلة (E) يكافئ}$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 - i\alpha^2 + 13\alpha + i\alpha - 10 + 2i = 0 \quad \text{وكافئ}$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha - 10 - i(\alpha^2 - \alpha - 2) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots\dots \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \\ (2) \dots\dots \alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha - 10 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{كافئ}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

نحل المعادلة (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ \alpha_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{هل } \alpha = -1 \text{ حل للمعادلة (2) ؟} \quad -1 - 6 - 13 - 10 = -30$$

إذن : $\alpha = -1$ مرفوض

$$\text{هل } \alpha = 2 \text{ حل للمعادلة (2) ؟} \quad 8 - 24 + 26 - 10 = 34 - 34 = 0$$

نتيجة : $\alpha = 2$ حل للمعادلة (E) إذن $z_0 = 2$

- 2

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (6+i)z^2 + (13+i)z - 10 + 2i & z-2 \\ \hline z^3 - 2z^2 & z^2 + (-4-i)z + 5-i \\ \hline (-4-i)z^2 + (13+i)z - 10 + 2i & \\ (-4-i)z^2 + (8+2i)z & \\ \hline (5-i)z - 10 + 2i & \\ (5-i)z - 10 + 2i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $\left. \begin{array}{l} z=2 \\ \text{أو} \end{array} \right\}$

$$(1) \dots\dots z^2 + (-4-i)z + 5-i = 0$$

$$\Delta = 16 + 8i - 1 - 4(5-i) \quad \text{لنحل في C المعادلة (1) :}$$

$$= 15 + 8i - 20 + 4i$$

$$= -5 + 12i$$

$$(\alpha + \beta i)^2$$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25 + 144}}{2}} \\ \beta = \frac{12}{2\alpha} = \frac{12}{4} = 3 \end{cases} \quad \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{نتيجة : } -5 + 12i \quad (2 + 3i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{4+i-2-3i}{2} = 1-i \\ z_2 = \frac{4+i+2+3i}{2} = 3+2i \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\text{نتيجة : حلول المعادلة (E) هي } z_0 = 2 \quad z_1 = 1-i \quad z_2 = 3+2i$$

$$3 - \text{لنكن } z \text{ لاحقة النقطة } G \text{ إذن : } z = \frac{-2(2) + 3(1-i) + 3+2i}{-2+3+1} = \frac{-4+3-3i+3+2i}{2} = 1 - \frac{1}{2}i$$

$$\text{منه : } G(1; -\frac{1}{2})$$

$$-2GA^2 + 3GB^2 + GC^2 + 2MG^2 = 9 \quad \text{يكافئ} \quad -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 9 \quad 4 -$$

$$MG^2 = \frac{9 + 2GA^2 - 3GB^2 - GC^2}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$GA^2 = \left| 1 - \frac{1}{2}i - 2 \right|^2 = \left| -1 - \frac{1}{2}i \right|^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$GB^2 = \left| 1 - \frac{1}{2}i - 1 + i \right|^2 = \left| \frac{1}{2}i \right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$GC^2 = \left| 1 - \frac{1}{2}i - 3 - 2i \right|^2 = \left| -2 - \frac{5}{2}i \right|^2 = 4 + \frac{25}{4} = \frac{41}{4}$$

$$MG^2 = \frac{9 + 2\left(\frac{5}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{41}{4}}{2}$$

نتيجة :

$$MG^2 = \frac{36 + 10 - 3 - 41}{8}$$

أي

$$MG^2 = \frac{1}{4}$$

أي

$$MG = \frac{1}{2}$$

أي

إذن : مجموعة النقط E_M هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $1/2$ التمرين 17

$$\text{ليكن } a = 3 + i\sqrt{3} \quad b = 2 + \sqrt{3} + 3i$$

A ، B ، C ، نقط من المستوي لواحقا على الترتيب a ، ā ، b حيث ā هو مرافق a

1 - بين أن المثلث AOB متقايس الأضلاع (O هي مبدأ المعظم)

2 - عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث AOBليكن α و β عددين مركبين و T التحويل النقطي للمستوي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى M' ذات

$$\text{اللاحقة } z' \text{ حيث } z' = \alpha z + \beta$$

3 - عين α و β حتى يكون $T(O) = G$ و $T(A) = C$

4 - بين أن T دوران يطلب مركزه وزاويته

الحل - 17

$$OA^2 = |3 + i\sqrt{3}|^2 = 9 + 3 = 12$$

- 1

$$OB^2 = |3 - i\sqrt{3}|^2 = 9 + 3 = 12$$

$$AB^2 = |3 - i\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 3i|^2 = |-2 - 2i\sqrt{3}|^2 = 12$$

نتيجة : $OA \perp OB$ AB إذن : OAB مثلث متقايس الأضلاع .

$$z_G = \frac{3 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3} + 0}{3} = 2 \quad -2$$

إذن : $G(2; 0)$ هي مركز ثقل المثلث OAB

$$\begin{cases} \alpha(0) + \beta = 2 \\ \alpha(3 + i\sqrt{3}) + \beta = 2 + \sqrt{3} + 3i \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} T(O) = G \\ T(A) = C \end{cases} \quad -3$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha(3 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 3i \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} \times \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \frac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{9 + 3} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \frac{6\sqrt{3} + 6i}{12} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : عبارة التحويل (T) هي : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad -4$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} \quad \text{إذن : } (T) \text{ هو دوران زاويته } \frac{\pi}{6} \text{ و مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة} \\ & |\alpha| = 1 \\ & \text{Arg}(\alpha) = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\}$$

التمرين 18

A و B نقطتان من المستوي لواحقتها على الترتيب $4 + 2i$ و $3 - i$

1- ما هي طبيعة المثلث OAB ؟ (O هو مبدأ المعلم)

2- عين مركز و زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B و B إلى O

3- لتكن C صورة O بالدوران R . ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$

الحل - 18

$$AO^2 = |4 + 2i|^2 = 16 + 4 = 20 \quad -1$$

$$BO^2 = |3 - i|^2 = 9 + 1 = 10$$

$$AB^2 = |3 - i - 4 - 2i|^2 = |-1 - 3i|^2 = 1 + 9 = 10$$

نتيجة : $\left. \begin{aligned} & BO = AB \\ & BO^2 + AB^2 = AO^2 \end{aligned} \right\}$ إذن : المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في B

2- ليكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة الدوران R حيث α و β عددين مركبين و $|\alpha| = 1$

$$\begin{cases} \alpha(4 + 2i) + \beta = 3 - i \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(3 - i) + \beta = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} R(A) = B \\ R(B) = O \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $\alpha(4 + 2i - 3 + i) = 3 - i$

$$\alpha = \frac{3-i}{1+3i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{3-i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{3-9i-i-3}{10} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -1 \quad \text{أي } \alpha \text{ معقول لأن } -1 = 1$$

$$\beta = \alpha(3-i) = i(3-i) = 1+3i \quad (2) :$$

نتيجة : عبارة الدوران R هي $z' = -1z - 1 + 3i$

$$\frac{1-3i}{1-i} = \frac{1-3i}{1-i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i-3}{2} = 2+i \quad \text{النقطة الصامدة :}$$

$$-1 = 1 \left[\cos 3 \frac{\pi}{2} + i \sin 3 \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{زاوية الدوران :}$$

$$\text{أذن : } \text{Arg}(\alpha) = 3 \frac{\pi}{2}$$

خلاصة : R دوران مركزه $w(2, 1)$ و زاويته $\frac{3\pi}{2}$

3 - لبحث عن لاحقة النقطة C :

$$T(0) = C \quad \text{أذن : لاحقة C هي } -i(0) = 1+3i$$

$$\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{نتيجة :}$$

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{أذن : } \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA} \quad \text{إذن : الرباعي ABOC متوازي أضلاع}$$

بما أن $AB = BO$ و $AB \perp BO$ فإن ABOC مربع

التمرين 19 -

لتكن A و B نقطتان من المستوي لاحتقهما على الترتيب $3-2i$ و $-1+6i$

w نقطة من حامل محور الفاصل R الدوران الذي مركزه w ويحول A إلى B

عين إحداثيي المركز w وزاوية الدوران R

الحل - 19

لتكن $w(x; 0)$ حيث $x \in \mathbb{R}$

$$WA = WB \quad \text{إذن : } R(A) = B$$

$$WA^2 = WB^2 \quad \text{منه :}$$

$$|3-2i-x|^2 = |-1+6i-x|^2 \quad \text{أي :}$$

$$(3-x)^2 + 4 = (1+x)^2 + 36 \quad \text{أي :}$$

$$9-6x+x^2+4 = 1+2x+x^2+36 \quad \text{أي :}$$

$$-6x+13 = 2x+37 \quad \text{أي :}$$

$$x = -3 \quad \text{أي}$$

نتيجة : مركز الدوران R هو $w(-3; 0)$

$$\theta = (\overrightarrow{WA}; \overrightarrow{WB}) \quad \text{لتكن } \theta \text{ زاوية الدوران إذن :}$$

$$= \text{Arg}(-1+6i+3) - \text{Arg}(3-2i+3)$$

$$= \text{Arg}\left(\frac{2+6i}{6-2i}\right)$$

$$= -\text{Arg}\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)$$

$$= -\text{Arg}\left(\frac{1+3i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}\right)$$

$$\text{Arg}\left(\frac{3+i-9i-3}{9-1}\right)$$

$$\text{Arg}(1)$$

$$\frac{\pi}{2}$$

خلاصة : R دوران مركزه $w(-3;0)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

التمرين - 20

A ، B ، C ، D نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب $2i$ ، 6 ، $1+i$ ، $3-3i$

α و β عددان مركبان و T التحويل النقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = 3\alpha z + \beta$

عين α و β علما أن $T(A) = B$ و $T(C) = D$

الحل - 20

$$\begin{cases} 3\alpha(2i) + \beta = 6 & \dots\dots\dots (1) \\ 3\alpha(1+i) + \beta = 3-3i & \dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} T(A) = B \\ T(C) = D \end{cases}$$

نطرح (2) من (1) : $3\alpha(2i - 1 - i) = 6 - 3 + 3i$

$$3\alpha(-1+i) = 3(1+i) \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{1+i}{-1+i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{1+i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-1-i-i+1}{2} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -i \quad \text{أي}$$

بالتعويض في (1) نحصل على :

$$\begin{aligned} \beta &= 6 - 3\alpha(2i) \\ &= 6 - 3(-i)(2i) \\ &= 6 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

خلاصة : عبارة التحويل T هي : $z' = -3iz$

التمرين - 21

A(2;1) ، B(3;0) نقطتان من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

H هو التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{-\sqrt{2}}{4}$

R هو الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

T هو الانسحاب الذي شعاعه \overrightarrow{BO}

1 - أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات T ، R ، H

2 - أكتب العبارة المركبة للتحويل ToRoH

3 - عين النقطة C حيث $(\text{ToRoH})(C) = O$ (O هي مبدأ المعلم)

الحل - 21

$$\text{عبارة H : } z' = -\frac{\sqrt{2}}{4}z + \beta \quad \text{حيث } z' = \frac{\beta}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4}} \quad (\text{المركز هو A})$$

$$\beta = (2+i)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{منه :}$$

$$\beta = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i \quad \text{أي :}$$

$$\text{نتيجة : } z' = -\frac{\sqrt{2}}{4}z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i \quad \text{عبارة H}$$

عبارة R : $z' = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] + \beta$ حيث $\beta = \frac{3 - \frac{\beta}{1 - \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]}}{3 - \frac{\beta}{1 - \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]}}$ (المركز)

منه : $\beta = 3 \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right]$

أي $\beta = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

نتيجة : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) z + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$ عبارة R

عبارة T : $z' = z - 3$

2 - ليكن z عدد مركب .

$RoH(z) = R[H(z)]$

$$\begin{aligned} &= R \left[\frac{-\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) i \right] \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \left[\frac{-\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) i \right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) z + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) i \right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-2}{8} (1-i) z + \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) \left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) i \right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) i - 2i - \frac{\sqrt{2}}{2} i + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + i \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + i \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} + i \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \right) + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ &= \frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{15}{4} + i \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{15}{4} + i \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) \\ \text{ToRoH}(z) &= T \left[\frac{-1}{4} (1-i) z + \frac{15}{4} + i \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

إذن :

$$= -\frac{1}{4} (1-i) z + \frac{15}{4} + i \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) - 3$$

$$= -\frac{1}{4} (1-i) z + \frac{3}{4} + i \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4} \right)$$

ToRoH وهي العبارة المركبة لـ

3 - لنكن z لاحقة النقطة C

ToRoH(z) = 0

ToRoH(C) = 0 يكافئ

$$-\frac{1}{4} (1-i) z + \frac{3}{4} + i \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

يكافئ

$$\frac{1}{4} [-(1-i) z + 3 + i(4\sqrt{2} - 1)] = 0$$

يكافئ

$$-(1-i) z + 3 + i(4\sqrt{2} - 1) = 0$$

يكافئ

$$z = \frac{3 + i(4\sqrt{2} - 1)}{1-i}$$

يكافئ

$$z = \frac{3 + i(4\sqrt{2} - 1)}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$

يكافئ

$$z = \frac{3 + 3i + i(4\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2} + 1}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{4 - 4\sqrt{2} + i(4\sqrt{2} + 2)}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = 2 - 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} + 1) \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : احدائبي النقطة C هما $C(2 - 2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} + 1)$

التمرين 22

1 - حل في C المعادلة $z^2 - (2 + i)z + 3 + i = 0$ وليكن z_0 و z_1 حلولها حيث $|z_0| > |z_1|$

2 - عين احدائبي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، C

3 - T التحويل النقطي للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

(أ) بين أن $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$

(ب) استنتج طبيعة التحويل T و عناصره المميزة .

(ج) أكتب العبارة المركبة للتحويل T

4 - A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل T

بين أن النقط A' ، B' ، C' على استقامة

الحل - 22

$$\Delta = 4 + 4i - 1 - 12 - 4i \quad : z^2 - (2 + i)z + 3 + i = 0 \quad - 1$$

$$= -9$$

$$= (3i)^2$$

$$\begin{cases} z' = \frac{2 + i - 3i}{2} = 1 - i \\ z'' = \frac{2 + i + 3i}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} z_0 = 1 + 2i \\ z_1 = 1 - i \end{matrix} \right\} \text{ إذن } |z_0| > |z_1|$$

$$2 - \text{لكن } z \text{ لاحقة النقطة G إذن : } z = \frac{1 + 1 + 2i + 1 - i}{3} = 1 + \frac{1}{3}i$$

$$\text{منه : } G(1; 1/3)$$

$$\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'} \quad (i - 3)$$

$$= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad \text{لأن } \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GM} + 3\overrightarrow{MG}$$

$$= \overrightarrow{GM} - 3\overrightarrow{GM}$$

$$= -2\overrightarrow{GM}$$

(ب) $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ إذن : M' هي صورة M بالتحاكي الذي مركزه $G(1; 1/3)$ ونسبته 2 -

(ج) T تحاكي نسبته 2 - و مركزه G إذن : عبارته $z' = -2z + \beta$ حيث

$$\beta = 3\left(1 + \frac{1}{3}i\right) = 3 + i \quad \text{منه} \quad \frac{\beta}{1 + 2} = 1 + \frac{1}{3}i$$

نتيجة : عبارة التحاكي T هي : $z' = -2z + 3 + i$

4 - لدينا النقط A ، B ، C على استقامة واحدة لأن لها نفس الفاصلة إذن فهي تنتمي إلى مستقيم (Δ)

و لكن صورة (Δ) بالتحاكي (T) هو مستقيم يشمل A' ، B' ، C' إذن : A' ، B' ، C' على استقامة واحدة .

التمرين 23

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_A = 2 + 2i$ ، $z_B = 5 + 5i$ ، $z_C = -2 - 2i$

1 - أثبت أن العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

- 2 - استنتج طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول B الى C و A نقطة صامدة وحيدة بـ T
3 - اكتب العبارة المركبة للتحويل T

4 - (γ) منحنى معادلته $y = 3x - \frac{1}{x}$. اكتب معادلة (γ') صورة المنحنى (γ) بالتحويل T

الحل - 23

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 - 2i - 2 - 2i}{5 + 5i - 2 - 2i}$$

- 1

$$\frac{-4 - 4i}{3 + 3i}$$

$$\frac{-4(1 + i)}{3(1 + i)}$$

$$\frac{-4}{3}$$

عدد حقيقي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4}{3}$ إذن : فعلا

2 - $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4}{3}$ يكافئ $z_C - z_A = \frac{-4}{3}(z_B - z_A)$

يكافئ $\vec{AC} = \frac{-4}{3} \vec{AB}$

بما أن $\vec{AC} = \frac{-4}{3} \vec{AB}$ ، $T(B) = C$ و $T(A) = A$ وحيدة

فإن T هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{-4}{3}$

3 - الشكل المركب لـ T : $z' = \frac{-4}{3}z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 + \frac{4}{3}} = z_A$

منه : $\beta = \frac{7}{3}(2 + 2i) = \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

إذن : عبارة T هي : $z' = \frac{-4}{3}z + \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

4 - لنبحث عن الشكل التحليلي للتحاكي (T) :
نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ إذن : $x' + iy' = \frac{-4}{3}(x + iy) + \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

$$= \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} + i\left(\frac{14}{3} - \frac{4}{3}y\right)$$

العبارة التحليلية للتحاكي T

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} \\ y' &= \frac{-4}{3}y + \frac{14}{3} \end{aligned} \right\} \text{ منه}$$

لنبحث الآن عن x و y بدلالة x' و y' :

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}x &= -x' + \frac{14}{3} \\ \frac{4}{3}y &= -y' + \frac{14}{3} \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{-3}{4}x' + \frac{7}{2} \\ y' &= \frac{-3}{4}y' + \frac{7}{2} \end{aligned} \right\} \text{ منه :}$$

صورة (γ) بـ التحاكي T :

يكافئ $y = 3x - \frac{1}{x}$ $-\frac{3}{4}y' + \frac{7}{2} = 3\left(-\frac{3}{4}x' + \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{-\frac{3}{4}x' + \frac{7}{2}}$

يكافئ $-\frac{3}{4}y' = -\frac{7}{2} - \frac{9}{4}x' + \frac{21}{2} - \frac{4}{-3x' + 14}$

يكافئ $-\frac{3}{4}y' = 7 - \frac{9}{4}x' + \frac{4}{3x' - 14}$

$$y' = \frac{-28}{3} + 3x' - \frac{16}{9x' - 42}$$

يكافئ

$$y = \frac{-28}{3} + 3x - \frac{16}{9x - 42} \quad \text{اذن : صورة } (\gamma) \text{ بالنحويل } T \text{ هو المنحنى } (\gamma') \text{ ذو المعادلة}$$

التمرين - 24

$$\text{لتكن المعادلة (E) : } z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$$

- 1 - بين ان المعادلة (E) تقبل حلين تخيليين صرفا مترافقين z_0 و \bar{z}_0 حيث الجزء التخيلي لـ z_0 موجب
- 2 - عين الحلول الاخرى z_1 و z_2 للمعادلة (E) حيث الجزء التخيلي لـ z_1 موجب
- 3 - استنتج تحويلا نقطيا بسيطا يحول z_0 إلى \bar{z}_0 و z_1 إلى z_2

الحل - 241 - ليكر $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$(i\alpha)^4 - 4(i\alpha)^3 + 14(i\alpha)^2 - 36i\alpha + 45 = 0 \quad \text{يكافئ (E) للمعادلة (E)}$$

$$\alpha^4 + 4i\alpha^3 - 14\alpha^2 - 36i\alpha + 45 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 + 4i(\alpha^3 - 9\alpha) = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} (2) \dots\dots\dots \alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 &= 0 \\ (2) \dots\dots\dots \alpha^3 - 9\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{حل المعادلة (2) : } \alpha^3 - 9\alpha = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \alpha(\alpha^2 - 9) = 0$$

$$\text{تكافئ} \quad \alpha^2 - 9 = 0 \quad \text{لأن } \alpha \neq 0$$

$$\text{تكافئ} \quad \alpha \in \{-3; 3\}$$

$$\text{هل } \alpha = 3 \text{ حل للمعادلة (1) ؟ } \quad 81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0 \quad \text{محقق}$$

$$\text{هل } \alpha = -3 \text{ حل للمعادلة (1) ؟ } \quad 81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0 \quad \text{محقق}$$

نتيجة : $3i$ و $-3i$ هما حلان للمعادلة (E)الجزء التخيلي لـ z_0 موجب اذن : $z_0 = 3i$ و $\bar{z}_0 = -3i$ 2 - البحث عن z_1 و z_2 :المعادلة (E) تكافئ $Q(z) = (z - 3i)(z + 3i)Q(z) = 0$ حيث Q كثير حدود من الدرجة (2) للمتغير z لبحث عنه

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 & z^2 - 9 \\ \hline z^4 + 0z^3 + 9z^2 & z^2 - 4z + 5 \\ \hline -4z^3 + 5z^2 - 36z + 45 & \\ -4z^3 + 0z^2 - 36z & \\ \hline 5z^2 + 45 & \\ 5z^2 + 45 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{نتيجة : } Q(z) = z^2 - 4z + 5 \quad \text{لنحل المعادلة } Q(z) = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$$

$$\text{اذن الجزء التخيلي لـ } z_1 \text{ موجب} \quad \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \\ z_2 &= \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \end{aligned} \right.$$

3 - لدينا $z_2 = \bar{z}_1$ اذن : يكفي أن نأخذ التحويل T ذو العبارة $z' = \bar{z}$ الذي يحول كل عدد مركب إلى مرافقه

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_0 &= T(z_0) \\ z_2 &= T(z_1) = \bar{z}_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{اذن}$$

و هو التناظر العمودي بالنسبة إلى محور الفواصل .

التمرين - 25

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب 1 و 4

(d) هي مجموعة نقط المستقيم (OA) ماعدا النقطة A

(Δ) هو مجموعة نقط المستقيم العمودي على (OA) في النقطة A ماعدا A

(Γ) هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 1
نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب Z حيث $Z = \frac{z^2}{z-1}$

لتكن m و M نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و Z

الجزء I

لتكن f و g دالتين معرفتين بـ $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

نسمي D_1 و D_2 مجموعتي تعريفي الدالتين f و g على الترتيب
أدرس تغيرات كل من f و g ثم استنتج $f(D_1)$ و $g(D_2)$

الجزء II

1- حل في C المعادلة $Z=3$ ذات المجهول z ثم أكتب الحلول على شكلها الأسّي

2- نفرض في هذا السؤال أن $z=1+e^{i\theta}$ (مع $\theta \in \mathbb{R}$)

أحسب Z بدلالة θ ثم استنتج مجموعة النقط M لما θ يسمح IR

3- نضع $m(x; y)$ و $M(X; Y)$

(أ) عين مجموعة النقط M لما m تسمح المجموعة (d)

(ب) عين مجموعة النقط M لما m تسمح المجموعة (Δ)

4- أحسب X و Y بدلالة x و y. ثم عين مجموعة النقط m عندما M تسمح محور الفواصل

الحل - 25

الجزء I :

تغيرات الدالة $f : f$ معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$: إذن $D_1 = \mathbb{R} - \{1\}$

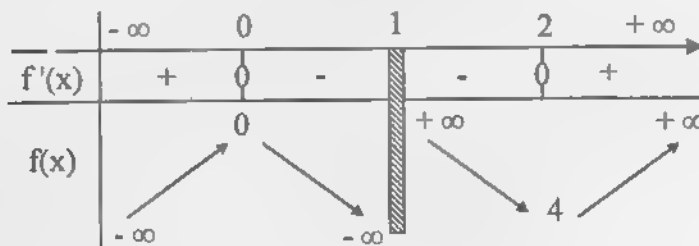
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$



$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$$

نتيجة : $f(D_1) =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$

تغيرات الدالة $g : g$ معرفة على \mathbb{R}^* : إذن $D_2 = \mathbb{R}^*$

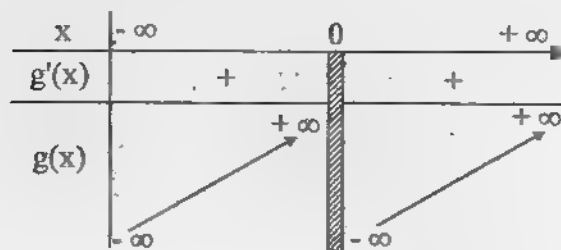
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{2x(x) - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$



نتيجة : $g(D_2) = \mathbb{R}$

الجزء II

$$\frac{z^2}{z-1} = 3 \quad \text{يكافئ} \quad Z = 3 \quad -1$$

$$z^2 = 3(z-1) \quad \text{يكافئ}$$

$$z^2 - 3z + 3 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\Delta = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

الشكل الأساسي لـ z_1 و z_2

$$z_1 = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right] = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z = \frac{(1 + e^{i\theta})^2}{1 + e^{i\theta} - 1} \quad \text{إذن : } z = 1 + e^{i\theta} - 2$$

$$= \frac{1 + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{e^{i\theta}}$$

$$= e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta}$$

$$= e^{-i\theta} + 1 + 1 + e^{i\theta}$$

$$\bar{z} = 1 + e^{-i\theta} \quad \text{و} \quad z = 1 + e^{i\theta} \quad \text{لأن} \quad \bar{z} + z$$

$$= 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$= 2 \operatorname{Re}(1 + e^{i\theta})$$

$$= 2 \operatorname{Re}(1 + \cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= 2(1 + \cos \theta)$$

$$M(2(1 + \cos \theta); 0) \quad \text{منه}$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$0 \leq 1 + \cos \theta \leq 2 \quad \text{إذن :}$$

$$0 \leq 2(1 + \cos \theta) \leq 4 \quad \text{منه :}$$

إذن : M تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[OB]$ و هي مجموعة النقط M لما θ يمسح \mathbb{R}

3- أ) m تلمس المجموعة (d) إذن : $m(x; y)$ حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

منه $z = x$ حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$Z = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{إذن} \quad Z = \frac{z^2}{z-1} \quad \text{لدينا}$$

$$M\left(\frac{x^2}{x-1}; 0\right) \quad \text{إذن}$$

$$\frac{x^2}{x-1} \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[\quad \text{فإن} \quad x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{لما}$$

إذن : النقطة M تنتمي إلى محور الفواصل ما عدا القطعة المستقيمة $[OB]$

حيث يمكن لـ M أن تنطبق على O أو B

ب) m تسمح المجموعة (Δ) إذن : $m(1; y)$ مع $y \neq 0$

$$z = 1 + iy \quad \text{منه}$$

$$Z = \frac{(1 + iy)^2}{1 + iy - 1} \quad \text{إذن}$$

$$Z = \frac{1 - y^2 + 2iy}{iy} \quad \text{أي}$$

$$Z = \frac{1 - y^2 + 2iy}{iy} \times \frac{-iy}{-iy} \quad \text{أي}$$

$$Z = \frac{-iy(1 - y^2) + 2y^2}{y^2} \quad \text{أي}$$

$$Z = 2 - \frac{1 - y^2}{y}i \quad \text{أي}$$

$$Z = 2 + \frac{y^2 - 1}{y}i \quad \text{أي}$$

$$h(y) = \frac{y^2 - 1}{y} \quad \text{نعتبر الدالة } h \text{ للمتغير الحقيقي } y \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ}$$

إذن : حسب الجزء I فإن لما $y \in \mathbb{R}^*$ فإن $h(y) \in \mathbb{R}$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z هي نقط المستقيم ذو المعادلة $x = 2$

$$X + iY = \frac{(x + iy)^2}{x + iy - 1} \quad \text{إذن} \quad Z = \frac{z^2}{z - 1} \quad -4$$

$$X + iY = \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x - 1 + iy} \times \frac{x - 1 - iy}{x - 1 - iy} \quad \text{أي}$$

$$X + iY = \frac{(x - 1)(x^2 - y^2) - iy(x^2 - y^2) + 2xy(x - 1)i + y(2xy)}{(x - 1)^2 + y^2} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{(x - 1)(x^2 - y^2) + y(2xy)}{(x - 1)^2 + y^2} \\ Y &= \frac{2xy(x - 1) - y(x^2 - y^2)}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x^3 - xy^2 - x^2 + y^2 - 2xy^2}{(x - 1)^2 + y^2} \\ Y &= \frac{2x^2y - 2xy - yx^2 + y^3}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x^3 - x^2 + y^2 - 3xy^2}{(x - 1)^2 + y^2} \\ Y &= \frac{x^2y + y^3 - 2xy}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي}$$

إذن : لما M تسمح محور الفواصل فإن $Y=0$ منه : $x^2 y + y^3 - 2xy = 0$ مع $(x; y) \neq (1; 0)$

$$y(x^2 - 2x + y^2) = 0 \quad \text{أي}$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{أو} \quad y = 0 \quad \text{أي}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{أو} \quad y = 0 \quad \text{أي}$$

إذن : m تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y=0$ أو الدائرة التي مركزها $A(1; 0)$ و نصف قطرها 1، باستثناء النقطة A

أي m تنتمي إلى محور الفواصل إتحاد الدائرة (Γ) ماعدا A

التمرين - 26

الجزء I

$u = 1 + i$ عدد مركب حيث

1 - أكتب u على شكله الأسّي

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $S_n = u^n + \bar{u}^n$

2 - بين أن $S_n = \lambda_n \cos \frac{n\pi}{4}$ حيث λ_n عدد حقيقي يطلب تعيينه

3 - عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = 0$

4 - أثبت أن إذا كان n عددا زوجيا فإن λ_n يكون عددا صحيحا

الجزء II

ليكن $n = 2m$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$

1 - باستعمال دسبور ثنائي الحدين أنشر العددين $(1+i)^{2m}$ و $(1-i)^{2m}$

2 - p عدد طبيعي أكتب على أبسط شكل العبارتين $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ و $i^{2p} + (-i)^{2p}$

3 - ليكن $m = 12$ برهن أن $\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$

الحل - 26

الجزء I

$$1+i = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \quad -1$$

$$S_n = u^n + \bar{u}^n \quad -2$$

$$= (\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}})^n + (\sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}})^n$$

$$= (\sqrt{2})^n e^{i \frac{n\pi}{4}} + (\sqrt{2})^n e^{-i \frac{n\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[e^{i \frac{n\pi}{4}} + e^{-i \frac{n\pi}{4}} \right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} + \cos \left(-\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{4} \right) \right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[2 \cos n \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\lambda_n = 2(\sqrt{2})^n : \text{إذن} = 2(\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4}$$

$$\cos n \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{يكافئ} \quad S_n = 0 \quad -3$$

$$\cos n \frac{\pi}{4} = \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{يكافئ} \quad \text{حيث } k \in \mathbb{N}^* \text{ لأن } n \text{ طبيعي}$$

$$\frac{n\pi}{4} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{n}{2} = 2k+1 \quad \text{يكافئ}$$

يكافئ $n = 2(2k+1)$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ $n = 4$ زوجي إذن $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n = 2(\sqrt{2})^{2k} \quad \text{منه :}$$

$$\lambda_n = 2 \times 2^k \quad \text{أي}$$

$$\lambda_n = 2^{k+1} \quad \text{أي}$$

منه : λ_n عدد صحيحالجزء II

$$(1+i)^{2m} = C_{2m}^0 i^0 + C_{2m}^1 i^1 + C_{2m}^2 i^2 + \dots + C_{2m}^{2m} i^{2m} \quad -1$$

$$(1-i)^{2m} = C_{2m}^0 (-i)^0 + C_{2m}^1 (-i)^1 + C_{2m}^2 (-i)^2 + \dots + C_{2m}^{2m} (-i)^{2m}$$

$$i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} = i(i)^{2p} + (-i)(-i)^{2p} \quad -2$$

$$= i(i)^{2p} - i(i)^{2p}$$

$$= i(i^{2p} - i^{2p})$$

$$= 0$$

$$(i)^{2p} + (-i)^{2p} = (i^2)^p + [(-i)^2]^p$$

$$= (-1)^p + (-1)^p$$

$$= 2(-1)^p$$

$$u^n + \bar{u}^n = 2(\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4} \quad 3 - \text{حسب الجزء I}$$

$$u^{2m} + \bar{u}^{2m} = 2(\sqrt{2})^{2m} \cos 2m \frac{\pi}{4} = 2(2)^m \cos \frac{m\pi}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} u^{2m} &= (1+i)^{24} = C_{24}^0 i^0 + C_{24}^1 i^1 + C_{24}^2 i^2 + \dots + C_{24}^{24} i^{24} \\ \bar{u}^{2m} &= (1-i)^{24} = C_{24}^0 (-i)^0 + C_{24}^1 (-i)^1 + C_{24}^2 (-i)^2 + \dots + C_{24}^{24} (-i)^{24} \end{aligned} \right\} : m = 12 \text{ من أجل}$$

$$u^{2m} + \bar{u}^{2m} = C_{24}^0 [i^0 + (-i)^0] + C_{24}^1 [i^1 + (-i)^1] + C_{24}^2 [i^2 + (-i)^2] + \dots + C_{24}^{24} [i^{24} + (-i)^{24}] \quad \text{منه :}$$

$$= C_{24}^0 [2(-1)^0] + 0 + C_{24}^2 [2(-1)^1] + 0 + \dots + C_{24}^{24} [2(-1)^{12}]$$

$$= 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \dots + C_{24}^{24}]$$

$$u^{2 \times 12} + \bar{u}^{2 \times 12} = 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \dots + C_{24}^{24}] \quad \text{إذن :}$$

$$2(\sqrt{2})^{2 \times 12} \cos \frac{2 \times 12 \pi}{4} = 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \dots + C_{24}^{24}] \quad \text{أي :}$$

$$2^{12} = C_{24}^0 - C_{24}^2 + \dots + C_{24}^{24} \quad \text{أي :}$$

$$\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12} \quad \text{أي :}$$

التمرين 271 - عين العددين الحقيقيين x و y حيث $(x+iy)^2 = 5-12i$ 2 - حل في C المعادلة $iz^2 - (1-2i)z + 2(1+i) = 9$ (E).....3 - نسمي z_1 و z_2 حلول المعادلة (E)أثبت أن z_1^{2008} و z_2^{2008} حقيقيانالحل - 27

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 + 2ixy &= 5 - 12i \\ |x+iy|^2 &= |5-12i| \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن : } (x+iy)^2 = 5-12i \quad -1$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \dots\dots x^2 - y^2 &= 5 \\ (2) \dots\dots 2xy &= -12 \\ (3) \dots\dots x^2 + y^2 &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :}$$

$$2x^2 = 18 \quad \text{بجمع (1) و (3)}$$

$$x^2 = 9 \quad \text{إذن :}$$

إذن : $x = 3$ أو $x = -3$
 ليكن $x = 3$ إذن العلاقة (2) تصبح : $2 \times 3 y = -12$
 منه : $y = -2$

نتيجة : $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$
 2 - حل المعادلة
 $iz^2 - (1 - 2i)z + 2(1 + i) = 0$
 $\Delta = (1 - 2i)^2 - 4i(2 + 2i)$
 $= 1 - 4i - 4 - 8i + 8$
 $= 5 - 12i$
 حسب السؤال (1) $= (3 - 2i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1 - 2i - 3 + 2i}{2i} = \frac{-1 - i}{i} = i \\ z_2 = \frac{1 - 2i + 3 - 2i}{2i} = \frac{4 - 4i}{2i} = -2 - 2i \end{cases}$$

3 -
 $z_1^{2008} = i^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$
 $z_2^{2008} = [-2(1 + i)]^{2008} = 2^{2008} \times [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{2008}$
 $z_2^{2008} = 2^{2008} \times (\sqrt{2})^{2008} \times [\cos \frac{2008\pi}{4} + i \sin \frac{2008\pi}{4}]$
 $z_2^{2008} = 2^{2008} \times 2^{1004} \times [\cos 502\pi + i \sin 502\pi]$
 $z_2^{2008} = 2^{3012}$

أي
 نتيجة : كل من z_1^{2008} و z_2^{2008} عدنان حقيقيان
 التمرين 28 =

- 1 - أنشر العبارة $[1 - i(1 + \alpha)]^2$
 2 - حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 + [-1 + i(1 - \alpha)]z + i\alpha + \alpha = 0$ ذات المجهول z
 نرسم z_1 و z_2 إلى حلول هذه المعادلة حيث z_1 مستقل عن α
 3 - نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم
 نكتب كل من z_1 و z_2 على شكله المثلثي
 4 - A و M نقطتان من المستوى لاحتقائهما على الترتيب z_1 و z_2
 لتكن E مجموعة النقط M من المستوي حيث $(z - z_1)(\overline{z - z_1}) = 2$
 تحقق أن المبدأ 0 ينتمي إلى المجموعة E ثم عين المجموعة E
 الحل 28 =

1 -
 $[1 - i(1 + \alpha)]^2 = 1 - 2i(1 + \alpha) - (1 + \alpha)^2$
 $= 1 - 2i - 2i\alpha - 1 - 2\alpha - \alpha^2$
 $= -\alpha^2 - 2\alpha - 2i - 2i\alpha$

2 -
 $\Delta = [-1 + i(1 - \alpha)]^2 - 4(i\alpha + \alpha)$
 $= 1 - 2i(1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2 - 4i\alpha - 4\alpha$
 $= 1 - 2i + 2i\alpha - 1 + 2\alpha - \alpha^2 - 4i\alpha - 4\alpha$
 $= -\alpha^2 - 2\alpha - 2i - 2i\alpha$
 حسب السؤال (1) $= [1 - i(1 + \alpha)]^2$

إذن :
 $\begin{cases} z_1 = \frac{1 - i(1 - \alpha) - 1 + i(1 + \alpha)}{2} = \frac{-i + i\alpha + i + i\alpha}{2} = i\alpha \\ z_2 = \frac{1 - i(1 - \alpha) + 1 - i(1 + \alpha)}{2} = \frac{2 - i + i\alpha - i - i\alpha}{2} = 1 - i \end{cases}$

نتيجة : z_1 مستقل عن α إذن $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = i\alpha$

3- ليكن $\alpha \in \mathbb{R}^*$ حيث $y \in \mathbb{R}^*$

$$z_1 = 1 - i - \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$z_2 = i\alpha - i(iy) = -y$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $y > 0$ إذن $-y < 0$

$$z_2 = y[\cos \pi + i \sin \pi] \quad \text{منه}$$

الحالة الثانية : $y < 0$ إذن $-y > 0$

$$z_2 = -y[\cos 2\pi + i \sin 2\pi] \quad \text{منه}$$

$$(0 - z_1)(\overline{0 - z_1}) = z_1 \times \bar{z}_1 = |z_1|^2 \quad \text{4- من أجل } z = 0 \text{ لدينا :}$$

$$(0 - z_1)(\overline{0 - z_1}) = |1 - i|^2 = 2 \quad \text{إذن :}$$

إذن : فعلا المبدأ 0 ينتمي إلى المجموعة E

لنبحث عن المجموعة (E) :

$$(z - z_1)(\overline{z - z_1}) = 2 \Leftrightarrow |z - z_1|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z - z_1| = \sqrt{2}$$

إذن : E هي الدائرة التي مركزها النقطة A ذات الإحداثيات z_1 ونصف قطرها $\sqrt{2}$.(لأن المسافة بين M و A هي $\sqrt{2}$)

Kimou.

التشابه المباشر

في كل هذا المحور نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{0}; \vec{0I}; 0j)$

تعريف :

S تحويل نقطي للمستوي .
نقول أن S تشابه مباشر إذا وفقط إذا كان S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل أربع نقط M, N, P, Q (حيث M لا تنطبق على N) إذا كانت صورها على الترتيب بالتحويل S هي M', N', P', Q'

$$(\vec{M'N'}; \vec{P'Q'}) = (\vec{MN}; \vec{PQ}) \text{ و } \frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN} \text{ فإن } Q', P'.$$

نسبة $\frac{M'N'}{MN}$ تسمى نسبة التشابه المباشر S (عدد حقيقي موجب تماما) و الزاوية $(\vec{MN}; \vec{M'N'})$ تسمى زاوية التشابه المباشر S .

خاصية أساسية : كل تشابه مباشر من المستوي المركب له عبارة مركبة من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث α و β عدنان مركبان و $\alpha \neq 0$ حيث نسبة هذا التشابه هي $|\alpha|$ و زاويته هي $\text{Arg}(\alpha)$
ملاحظة : باعتبار القيم الممكنة لـ α فإن كل من الانسحاب و التناظر المركزي و التحاكي و الدوران هي تشابهات للمستوي .
نشاط :

S تشابه للمستوي عبارته المركبة : $z' = (1 + i)z - 2i$
عين احداثيات A' صورة $A(1; -1)$ بـ S ثم نسبة وزاوية التشابه S
الحل : من أجل $z = 1 - i$ فإن : $z' = (1 + i)(1 - i) - 2i = 1 + 1 - 2i = 2 - 2i$
إذن : $A'(2; -2)$

لتكن k نسبة التشابه S إذن : $k = |1 + i| = \sqrt{2}$

لتكن θ زاوية التشابه S إذن : $\theta = \text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

تركيب تشابهين مباشرين

خاصية (1)

تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه نسبته هي جداء النسبتين و زاويته هي مجموع الزاويتين
نتائج :

ليكن S تشابه مباشر للمستوي عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$

التشابه المباشر	النسبة	الزاوية	ملاحظة
الانسحاب	1	0	$\alpha = 1$
التناظر المركزي	1	π	$\alpha = -1$
التحاكي	$ \alpha $	$\text{Arg}(\alpha)$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{0; 1; -1\}$
الدوران	1	$\text{Arg}(\alpha)$	$\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $ \alpha = 1$
	$ \alpha $	$\text{Arg}(\alpha)$	$\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $ \alpha \neq 1$

خلاصة :

S تشابه مباشر نسبته k حيث $k \in \mathbb{R}^*$ و زاويته θ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

❖ إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$ فإن S انسحاب .

❖ إذا كان $(k; \theta) \neq (1; 0)$ فإن S يقبل نقطة صامدة وحيدة w تسمى مركز التشابه . في هذه الحالة التشابه S يكتب على أحد الأشكال التالية $S = \text{RoH}$ أو $S = \text{HoR}$ حيث H هو التحاكي ذو المركز w و النسبة k و R هو الدوران ذو المركز w و الزاوية θ

مثال :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)z + 3i \quad S_1 \text{ تشابه عبارته}$$

$$z' = (\sqrt{3} + i)z + 3 - 3\sqrt{3}i \quad S_2 \text{ تشابه عبارته}$$

ما هي طبيعة التحويل $S_1 \circ S_2$ ؟

الحل :

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right] = 2 \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \text{ تشابه نسبته } \frac{1}{2} \text{ و زاويته } -\frac{\pi}{6} \\ S_2 \text{ تشابه نسبته } 2 \text{ و زاويته } \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \text{ نتيجة :}$$

$$\text{إذن : } S_1 \circ S_2 \text{ هو تشابه نسبته } 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ و زاويته } \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$$

أي : $S_1 \circ S_2$ هو الانسحاب .

لنبحث عن شعاعه نبحث عن صورة نقطة كيفية ليكن المبدأ O .

$$S_1 \circ S_2(0) = S_1[S_2(0)]$$

لدينا : صورة المبدأ بالتشابه S_2 هي النقطة ذات الألفة $3 - 3\sqrt{3}i$ و صورة النقطة ذات الألفة $3 - 3\sqrt{3}i$ بالتحويل S_1

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)(3 - 3\sqrt{3}i) + 3i = 3\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4}i - \frac{3}{4}i - 3\frac{\sqrt{3}}{4} + 3i$$

$$= 0$$

$$S_1 \circ S_2(0) = 0 \quad \text{منه : أي شعاع الانسحاب معدوم .}$$

نتيجة : $S_1 \circ S_2$ هو تحويل حيادي للمستوي (التحويل المطابق) .

تعيين تشابه مباشر علم مركزه و زاويته و نسبته

ليكن S تشابه مباشر مركزه w و زاويته θ و نسبته k حيث $k \in]0; +\infty[$ و $U \in]0; 1[$

من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن w فإن :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{wM'} = K \overrightarrow{wM} \\ (\overrightarrow{wM}; \overrightarrow{wM'}) = \theta \end{array} \right\} \text{يكافئ } S(M) = M'$$

$$S(w) = w \quad \diamond$$

نشاط :

A ، B ، C ، D نقط ذراحقها على الترتيب 1 ، -5i ، -4+5i ، -3

عين التشابه الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D ثم عين عناصره المميزة .

الحل :

ليكن S التشابه المطلوب

الكتابة المركبة لـ S هي $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(1) + \beta = -3 - 5i \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(-4 + 5i) + \beta = -3 \dots\dots\dots (2) \end{array} \right. \text{يكافئ } \left\{ \begin{array}{l} S(A) = B \\ S(C) = D \end{array} \right.$$

$$\alpha - \alpha(-4 + 5i) = -3 - 5i + 3 \quad \text{بطرح (2) من (1) :}$$

$$\alpha(1 + 4 - 5i) = -5i \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-5i}{5-5i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-i+1}{2} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أي}$$

بالتعويض في (1) : $\beta = -3 - 5i - \alpha = -3 - 5i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ إذن : $\beta = -3 - 5i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\beta = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$ أي :

نتيجة : عبارة S المطلوبة هي : $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$: العناصر الهندسية :

إذن : نسبة التشابه هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : زاوية التشابه هي $\frac{-\pi}{4}$ $\text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{-\pi}{4}$

إذن : المركز هو $w(-8; -1)$ $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{-7-9i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = -8-i$

نشاط (2)

A ، B ، C : نقاط لواحقها على الترتيب i ، $-2+3i$ ، $-4+5i$

عين التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول C إلى B

الحل :

ليكن S التشابه المطلوب .

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

A مركز التشابه إذن : $S(A) = A$

$$\begin{cases} \alpha(i) + \beta = i & \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(-4+5i) + \beta = -2+3i & \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = B \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i+4-5i) = i+2-3i$

أي : $\alpha = \frac{2-2i}{4-4i}$

أي : $\alpha = \frac{2(1-i)}{4(1-i)}$

أي $\alpha = \frac{1}{2}$

بالتعويض في (1) : $\beta = i - i\alpha = i - \frac{1}{2}i$ إذن : $\beta = \frac{1}{2}i$ أي :

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$

ملاحظة : $\alpha \in \mathbb{R}^*$ إذن : α تحاكي .

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين ننسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$

التمرين 1

ABC مثلث كفي . w نقطة من المستوي .

- 1 - أنشئ النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحاكي الذي مركزه w ونسبته 3
- 2 - أنشئ النقط A'' ، B'' ، C'' صور النقط A' ، B' ، C' على الترتيب بالدوران الذي مركزه w وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$3 - \text{برهن أن } \frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$$

الحل 1

1 - الانشاء :

$$\vec{wA'} = 3 \vec{wA}$$

$$\vec{wB'} = 3 \vec{wB}$$

$$\vec{wC'} = 3 \vec{wC}$$

- 3 - ليكن H التحاكي الذي مركزه w ونسبته 3

و ليكن R الدوران الذي مركزه w وزاويته $\frac{\pi}{3}$

إذن : RoH هو التشابه الذي مركزه w ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$\left. \begin{aligned} S(A) &= \text{RoH}(A) = R[H(A)] = R[A'] = A'' \\ S(B) &= \text{RoH}(B) = R[H(B)] = R[B'] = B'' \\ S(C) &= \text{RoH}(C) = R[H(C)] = R[C'] = C'' \end{aligned} \right\} \text{ نضع } S = \text{RoH} \text{ إذن :}$$

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA} \quad \text{منه حسب خواص التشابه :}$$

التمرين 2

نرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة $z' = (1+i)z + 4$ حيث

نعتبر النقطتين M و N صورتها على الترتيب M' و N'

- 1 - بين أن النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ ثابتة من أجل M لا تنطبق على N

- 2 - بين أن توجد نقطة وحيدة A تنطبق على صورتها .

- 3 - أحسب $\frac{AM'}{AM}$ وكذا الزاوية $(\vec{AM}; \vec{AM'})$ من أجل M لا تنطبق على A

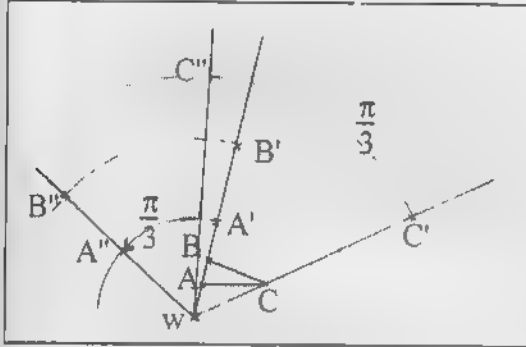
- 4 - لتكن النقط B ، C ، D صورها على الترتيب B' ، C' ، D' . برهن أن المثلثان BCD و B'C'D' متشابهان .

الحل 2

ليكن S التحويل النقطي الذي عبارته المركبة $z' = (1+i)z + 4$

$$\left. \begin{aligned} |1+i| &= \sqrt{2} \\ \text{Arg}(1+i) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \text{ 1 - لدينا :}$$

إذن : S هو تشابه مباشر للمستوي زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\sqrt{2}$



$$\left. \begin{array}{l} \frac{M'N'}{MN} = \sqrt{2} \text{ وإن } \left\{ \begin{array}{l} M' \\ N' \end{array} \right\} \begin{array}{l} S(M) \\ S(N) \end{array} \end{array} \right\} \text{ بما أن (نسبة ثابتة)}$$

ملاحظة : يمكن إثبات هذا بطريقة أخرى كمايلي :

$$\left. \begin{array}{l} M' \text{ لاحقة } z \\ N' \text{ لاحقة } t \end{array} \right\} \text{ ليكن : } \left\{ \begin{array}{l} (1+i)z+4 \text{ هي لاحقة } M' \\ (1+i)t+4 \text{ هي لاحقة } N' \end{array} \right\} \text{ إذن :}$$

$$\begin{aligned} \frac{M'N'}{MN} &= \frac{|(1+i)t+4 - (1+i)z-4|}{|t-z|} \quad \text{من أجل } M \neq N \text{ لدينا :} \\ &= \frac{|(1+i)(t-z)|}{|t-z|} \\ &= \frac{|1+i| |t-z|}{|t-z|} \\ &= |1+i| \end{aligned}$$

$$\frac{M'N'}{MN} = \sqrt{2} \quad \text{إذن : ثابت .}$$

2 - لتكن A ذات اللاحقة z

$$z' = z \quad \text{يكافئ } S(A) = A$$

$$(1+i)z+4 = z \quad \text{يكافئ}$$

$$iz = -4 \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{-4}{i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = 4i \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : توجد نقطة وحيدة A لاحقتها 4i حيث صورتها تنطبق على نفسها
إذن : A(0 ; 4) هي مركز التشابه S .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2} \text{ (نسبة التشابه)} \\ \frac{\overrightarrow{AM'}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{\pi}{4} \text{ (زاوية التشابه)} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left\{ \begin{array}{l} M' = S(M) \\ A = S(A) \end{array} \right\} \quad -3$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{B'C'}{BC} = \sqrt{2} \\ \frac{B'D'}{BD} = \sqrt{2} \\ \frac{C'D'}{CD} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left\{ \begin{array}{l} B' = S(B) \\ C' = S(C) \\ D' = S(D) \end{array} \right\} \quad -4$$

إذن : المثلثان BDC و B'C'D' متشابهان .

التمرين 3 -

T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب : $z' = 2iz + 3$

لتكن A ، B ، C نقط ، واحققها على الترتيب i ، 2 ، 1-i

1 - عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل T .

2 - عين لاحقة النقطة D حيث T(D) = A

$$-3 \text{ - برهن أن } \frac{A'E'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$$

4 - أحسب $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$

الحل - 3

$$1 \text{ هي } A' \text{ لاحقة } 2i(i) + 3 = 3 - 2 = 1$$

$$3 + 4i \text{ هي } B' \text{ لاحقة } 2i(2) + 3 = 3 + 4i$$

$5 + 2i$ هي C' لائحة $2i(1 - i) + 3 = 2i + 2 + 3 = 5 + 2i$ إذن : لائحة C' هي $5 + 2i$

2 - لتكن z لائحة النقطة D

$$2iz + 3 = i \quad \text{يكافئ} \quad T(D) = A$$

$$z = \frac{-3 + i}{2i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{-3 + i}{2i} \times \frac{-2i}{-2i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{6i + 2}{4} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : لائحة النقطة D هي $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

3 - لدينا : $\begin{cases} |2i| = 2 \\ \text{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ إذن : T هو تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ و نمبته 2

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \quad \text{فإن} : \begin{cases} A' = T(A) \\ B' = T(B) \\ C' = T(C) \end{cases} \quad \text{بما أن}$$

منه : $A'B' \times AC = A'C' \times AB$

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{إذن :}$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \text{Arg}\left(\frac{3 + 4i - 1}{2 - i}\right) \quad \text{--- 4}$$

$$= \text{Arg}\left(\frac{2 + 4i}{2 - i}\right)$$

$$= \text{Arg}\left(\frac{2 + 4i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i}\right)$$

$$= \text{Arg}\left(\frac{4 + 2i + 8i - 4}{4 + 1}\right)$$

$$= \text{Arg}(2i)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

ملاحظة : يمكن الاجابة مباشرة أن $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$ هي زاوية التشابه

التمرين 4 -

A نقطة من المستوي لاحقتها 1 . H التحاكي الذي مركزه A و نمبته 2 -

R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1 - أكتب العبارة المركبة لكل من H : RoH ، HoR ، R ، H

2 - هل $RoH = HoR$ ؟

الحل - 4

1 - عبارة H : $z' = -2z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+2} = 1$ منه $\beta = 3$

إذن : عبارة H هي $z' = -2z + 3$

عبارة R : $z' = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} = 1$

منه : $z' = iz + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - i} = 1$ أي $\beta = 1 - i$

إذن : عبارة R هي $z' = iz + 1 - i$

عبارة RoH : $z \xrightarrow{H} -2z + 3 \xrightarrow{R} i[-2z + 3] + 1 - i = -2iz + 1 + 2i$
 إذن : عبارة RoH هي : $z' = -2iz + 1 + 2i$

عبارة HoR : $z \xrightarrow{R} iz + 1 - i \xrightarrow{H} -2(iz + 1 - i) + 3 = -2iz + 1 + 2i$
 إذن : عبارة RoH هي : $z' = -2iz + 1 + 2i$

2 - من السؤال السابق نلاحظ أن HoR و RoH لهما نفس العبارة المركبة .
 إذن : $HoR = RoH$

التمرين - 5

A و B نقطتان من المستوي لاحقتهما على الترتيب 2 و $3 + i$
 S هو التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (OA)

T هو الانسحاب الذي شعاعه \vec{AB}

1 - أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات S : T : SoT : ToS

2 - هل $SoT = ToS$

الحل - 5

1 - عبارة التناظر S : لدينا : $A(2; 0)$ إذن : A تنتمي إلى محور الفواصل

منه : التناظر المحوري بالنسبة إلى (OA) هو التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل منه عبارة S : $z' = \bar{z}$

عبارة الانسحاب T : $z' = z + \beta$ حيث β لاحقة الشعاع \vec{AB} .

إذن : $\beta = 3 + i - 2 = 1 + i$

منه : عبارة T هي : $z' = z + 1 + i$

عبارة SoT : $z \xrightarrow{T} z + 1 + i \xrightarrow{S} \overline{z + 1 + i} = \bar{z} + 1 - i$

إذن : عبارة SoT هي : $z' = \bar{z} + 1 - i$

عبارة ToS : $z \xrightarrow{S} \bar{z} \xrightarrow{T} \bar{z} + 1 + i$

إذن : عبارة ToS هي : $z' = \bar{z} + 1 + i$

2 - حسب السؤال (1) SoT و ToS لهما عبارتان مركبتان مختلفتان .

إذن : $SoT \neq ToS$

التمرين - 6

في كل حالة من الحالات التالية عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S ذو المركز الذي لاحقته z_0 و النسبة k و الزاوية θ

$$1 - \theta = \frac{\pi}{2} ; k = 2 ; z_0 = 0$$

$$2 - \theta = \frac{\pi}{4} ; k = \sqrt{2} ; z_0 = -i$$

$$3 - \theta = \frac{3\pi}{2} ; k = \frac{1}{2} ; z_0 = 2i$$

$$4 - \theta = \pi ; k = 1 ; z_0 = 1 - 2i$$

الحل - 6

في كل مرة التشابه S عبارته $\left. \begin{aligned} z' &= \alpha z + \beta \\ \frac{\beta}{1 - \alpha} &= z_0 \end{aligned} \right\}$ حيث $\beta = z_0(1 - \alpha)$ منه $\alpha = k(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$1 - \theta = \frac{\pi}{2} ; k = 2 ; z_0 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i \\ \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ إذن :}$$

منه عبارة S : $z' = 2iz$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad k = \sqrt{2} \quad ; \quad z_0 = -i - 2$$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 1 + i \\ \beta = -i(1 - i) = -1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$z' = (1 + i)z - 1 \quad \text{منه عبارة : S}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad k = \frac{1}{2} \quad ; \quad z_0 = 2i - 3$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left(\cos 3 \frac{\pi}{2} + i \sin 3 \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} i \\ \beta = 2i \left(1 + \frac{1}{2} i \right) = 2i - 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$z' = -\frac{1}{2} i z - 1 + 2i \quad \text{منه عبارة : S}$$

$$\theta = \pi \quad ; \quad k = 1 \quad ; \quad z_0 = 1 - 2i - 4$$

$$\begin{cases} \alpha = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1 \\ \beta = (1 - 2i)(1 + 1) = 2 - 4i \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$z' = -z + 2 - 4i \quad \text{منه عبارة : S}$$

التمرين 7

عين الدالة المركبة S للمتغير z التي تعرف التشابه المباشر في كل حالة من الحالات التالية :

$$1 - \text{المركز هو المبدأ } O(0; 0) \quad ; \quad \text{النسبة } 2\sqrt{2} \quad ; \quad \text{الزاوية } \frac{\pi}{4}$$

$$2 - \text{المركز } w(1; 2) \quad ; \quad \text{النسبة } 3 \quad ; \quad \text{الزاوية } \frac{2\pi}{3}$$

الحل - 7

بنفس طريقة التمرين السابق نسمي z_0 لاحقة المركز w ونضع $S(z) = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha = k(\cos \theta + i \sin \theta)$ $\beta = z_0(1 - \alpha)$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad k = 2\sqrt{2} \quad ; \quad z_0 = 0 - 1$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 + 2i \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$S(z) = (2 + 2i)z \quad \text{منه :}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad z_0 = 1 + 2i - 2$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \left(\cos 2 \frac{\pi}{3} + i \sin 2 \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \\ \beta = \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i \right) (1 + 2i) = \frac{1}{2} (5 - 3\sqrt{3} i) (1 + 2i) = \frac{1}{2} [5 + 6\sqrt{3} + i(10 - 3\sqrt{3})] \end{cases}$$

$$S(z) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \right) z + \frac{5 + 6\sqrt{3}}{2} + i \frac{10 - 3\sqrt{3}}{2} \quad \text{منه :}$$

التمرين 8

T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ من المستوى النقطة $M'(x'; y')$ من المستوي حيث

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1 - عين الشكل المركب للتحويل T

2 - تعرف على طبيعة التحويل T و عناصره الهندسية المميزة .

الحل - 8

$$\begin{aligned}
 1 - \text{نضع } z' = x' + iy' \text{ و } z = x + iy \\
 \text{إذن : } x' + iy' = x - y + i(x + y - 1) \\
 \text{أي : } x' + iy' = x - y + ix + iy - i \\
 \text{أي : } x' + iy' = x + iy + i(x + y) - i \\
 \text{أي : } x' + iy' = (x + iy)(1 + i) - i \\
 \text{منه : } z' = (1 + i)z - i \\
 2 - \text{التحويل } T \text{ من الشكل } z' = \alpha z + \beta \text{ حيث } \left. \begin{aligned} \alpha &= 1 + i \\ \beta &= -i \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

إذن : T هو تشابه مباشر و عناصره الهندسية كمايلي :

$$\text{المركز : } w(1; 0) \text{ إذن : } \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{-i}{-i} = 1$$

$$\text{النسبة : } |\alpha| = |1 + i| = \sqrt{2} \text{ إذن : النسبة هي } \sqrt{2}$$

$$\text{الزاوية : } \text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4} \text{ إذن : الزاوية هي } \frac{\pi}{4}$$

التمرين - 9

نقبل أن كل تشابه مباشر للمستوي له كتابة مركبة من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$ و β عددين مركبين و $\alpha \neq 0$ لتكن A, B, C, D نقط من المستوي حيث A و B متمايزتان .
برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول A إلى C و B إلى D

الحل - 9

1 - ليكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S إذا وجد حيث $\alpha \in \mathbb{C}$ و $\beta \in \mathbb{C}$ و $\alpha \neq 0$ نعتبر الأعداد z_A, z_B, z_C, z_D لواحق النقط A, B, C, D على الترتيب .

$$\begin{cases} \alpha z_A + \beta = z_C \dots\dots (1) \\ \alpha z_B + \beta = z_D \dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = C \\ S(B) = D \end{cases}$$

$$\text{بطرح (2) من (1) : } \alpha z_A - \alpha z_B = z_C - z_D$$

$$\alpha(z_A - z_B) = z_C - z_D \quad \text{منه :}$$

$$\text{إذن : } \alpha = \frac{z_C - z_D}{z_A - z_B} \text{ لأن } z_A \neq z_B$$

$$\beta = z_C - \alpha z_A \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$\text{إذن : } \beta = z_C - \frac{z_C - z_D}{z_A - z_B} z_A$$

نتيجة : يوجد تشابه وحيد S يحقق $S(A) = C$ و $S(B) = D$ لأن α و β وحيدان .

التمرين - 10

لتكن النقط $A(1; 0), A'(-3; -5), B(-4; 5), B'(-3; 0)$

1 - أعط العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B'

2 - ما هي العناصر الهندسية للتشابه S

3 - عين إحداثيي C' صورة النقطة $C(-1; 5)$ بالتشابه S

الحل - 10

1 - لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(1) + \beta = -3 - 5i \dots\dots (1) \\ \alpha(-4 + 5i) + \beta = -3 \dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases}$$

$$\text{بطرح (2) من (1) : } \alpha - \alpha(-4 + 5i) = -3 - 5i + 3$$

$$\alpha(1 + 4 - 5i) = -5i \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-5i}{5 - 5i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-i+1}{1+1} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أي}$$

$$\beta = -3 - 5i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i \quad \text{نتيجة : عبارة S هي :}$$

$$\text{المركز : } w(-8; -1) \quad \text{إذن : المركز هو } \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{-7-9i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = -8-i$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{النسبة :} \quad \text{إذن : النسبة هي } |\alpha| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-\pi}{4} \quad \text{الزاوية :} \quad \text{إذن : الزاوية هي } \text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{-\pi}{4}$$

3- من أجل $z = -1 + 5i$ فإن :

$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(-1 + 5i) - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i + \frac{5}{2} - \frac{7}{2} - \frac{9}{2}i \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$C'\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \quad \text{منه :}$$

التمرين 11

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = iz + 1 - i$

(d) مستقيم معادلته $y = x + 5$

عين معادلة المستقيم (d') صورة المستقيم (d) بالتشابه S

الحل 11

للبحث عن معادلة (d') يمكن اتباع طريقتين مختلفتين كمايلي :

الطريقة الأولى : نأخذ نقطتين متميزتين A و B من (d)

مثلا : A(0; 5) ؛ B(-5; 0)

نبحث عن A' و B' حيث $A' = S(A)$ ؛ $B' = S(B)$

من أجل $z = 5i$ لدينا : $z' = i(5i) + 1 - i = -5 + 1 - i = -4 - i$

إذن : A'(-4; -1)

من أجل $z = -5$ لدينا : $z' = i(-5) + 1 - i = -5i + 1 - i = 1 - 6i$

إذن : B'(1; -6)

نتيجة : معادلة (d') هي معادلة المستقيم (A'B') كمايلي :

$$\begin{vmatrix} x+4 & 1+4 \\ y+1 & -6+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{يكافئ} \quad N(x; y) \in (d')$$

$$-5(x+4) = 5(y+1) \quad \text{يكافئ}$$

$$-x-4 = y+1 \quad \text{يكافئ}$$

$$y = -x-5 \quad \text{يكافئ} \quad (d')$$

الطريقة الثانية : نبحث عن z بدلالة z' كمايلي :

$$iz = z' - 1 + i \quad \text{يكافئ} \quad z' = iz + 1 - i$$

$$z = \frac{z' - 1 + i}{i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{z' - 1 + i}{i} \times \frac{-i}{-i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = -iz' + 1 + i \quad \text{يكافئ}$$

ليكن $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$$z = -iz' + 1 + i \quad \text{لدينا :}$$

$$x + iy = -i(x' + iy') + 1 + i \quad \text{إذن :}$$

$$x + iy = -ix' + y' + 1 + i \quad \text{أي}$$

$$x + iy = y' + 1 + i(1 - x') \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x = y' + 1 \\ y = 1 - x' \end{cases} \quad \text{منه}$$

$$y = x + 5 \quad \text{(d) له المعادلة}$$

$$\text{منه (d')} \quad 1 - x' = y' + 1 + 5 \quad \text{(بتعويض } x \text{ و } y \text{ بدلالة } x' \text{ و } y')$$

$$-x' = y' + 5 \quad \text{أي}$$

$$y' = -x' - 5 \quad \text{أي}$$

$$y = -x - 5 \quad \text{أي معادلة (d') هي}$$

التمرين 12 -

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = (i + 1)z + 2 - i$

(C_1) دائرة مركزها O و نصف قطرها 4

(C_2) دائرة مركزها $w(2; 2)$ و نصف قطرها 3

1 - عين (C'_1) صورة الدائرة (C_1) بـ التشابه S

2 - عين (C'_2) صورة الدائرة (C_2) بـ التشابه S

الحل 12 -

من خواص التشابه S أنه يحول دائرة ذات المركز w و نصف القطر α إلى دائرة مركزها $S(w)$ و نصف قطرها $k\alpha$ حيث k هي نسبة التشابه .

إذن :

1 - صورة المبدأ O هي : $w(2; -1)$

نسبة التشابه S هي : $|i + 1| = \sqrt{2}$

إذن : نصف قطر الدائرة (C'_1) هو $4\sqrt{2}$

منه : معادلة (C'_1) : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 + 1 = 32 \quad \text{أي :}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 27 = 0 \quad \text{أي :}$$

2 - صورة النقطة $w(2; 2)$: $w'(2; 3)$: $(i + 1)(2 + 2i) + 2 - i = 4i + 2 - i = 2 + 3i$

إذن : صورة w هي $w'(2; 3)$

منه : معادلة (C'_2) : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (3\sqrt{2})^2$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 = 18 \quad \text{أي :}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0 \quad \text{أي :} \quad \text{و هي معادلة } (C'_2) .$$

التمرين 13 -

T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = \alpha z + \alpha$ حيث α عدد مركب غير معدوم

1 - عين α حتى يكون T اتسحاباً ثم عين شعاعه .

2 - عين α حتى يكون T دورانيا زاويته $\frac{\pi}{3}$ ثم أوجد مركزه .

3 - عين α حتى يكون T تحاكي نسبته 3 - ثم عين مركزه .

4 - عين الطبيعة و العناصر الهندسية للتحويل T من أجل $\alpha = -1 - i$

الحل - 13

1 - T انسحاب إذا فقط إذا كان $\alpha = 1$

إذن : عبارة الانسحاب T : $z' = z + 1$

منه : شعاع الانسحاب هو $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 - T دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ إذا فقط إذا كان $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$$\alpha = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أي}$$

إذن : عبارة الدوران T هي : $z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ منه عناصره :

$$\frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + i \sqrt{3}}{1 - i \sqrt{3}} \times \frac{1 + i \sqrt{3}}{1 + i \sqrt{3}} = \frac{-2 + 2i \sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

إذن : المركز هو $w\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3 - T تحاكي نسبته -3 إذا فقط إذا كان $\alpha = -3$

منه عبارة التحاكي T : $z' = -3z - 3$

$$\frac{-3}{1+3} = -\frac{3}{4} \quad \text{المركز :}$$

إذن : مركز التحاكي هو $w\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha| = \sqrt{2} \\ \text{Arg}(\alpha) = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \text{إذن : } \alpha = -1 - i$$

$$\frac{-1-i}{1+1+i} = \frac{-1-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-2+i-2i-1}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5} i$$

إذن : T تشابه مباشر مركزه $w\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ و زاويته $\frac{5\pi}{4}$ و نسبته $\sqrt{2}$

التمرين - 14

ABCD مربع مركزه P حيث $AB = 8 \text{ cm}$ و $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$

Q هو منتصف [CD] و S هو التشابه المباشر حيث $S(A) = P$ و $S(C) = Q$

نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث $\vec{AB} = 8\vec{u}$ و $\vec{AD} = 8\vec{v}$

1 - عين لواحق النقط A , C , Q , P

2 - أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم استنتج زاويته θ و نسبته k

3 - عين لاحقة w مركز التشابه S

الحل - 14

1 - باعتبار المعلم $(A; \vec{u}; \vec{v})$ فإن إحداثيات النقط A , C , P , Q

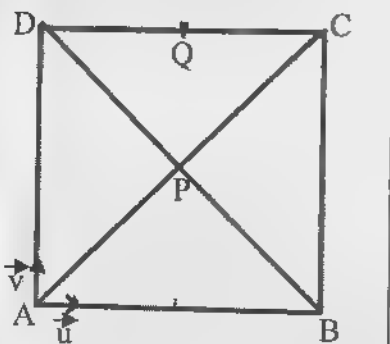
هي كما يلي : $A(0; 0)$; $C(8; 8)$; $P(4; 4)$; $Q(4; 8)$

منه لواحق النقط A , C , P , Q هي على الترتيب :

$$4+8i ; 4+4i ; 8+8i ; 0$$

2 - لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(0) + \beta = 4+4i & (1) \\ \alpha(8+8i) + \beta = 4+8i & (2) \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = P \\ S(C) = Q \end{cases}$$



من (1) : $\beta = 4 + 4i$

بالتعويض في (2) : $\alpha = \frac{4 + 8i - (4 + 4i)}{8 + 8i}$

$$\alpha = \frac{4i}{8(1+i)} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{i}{2(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{i+1}{4} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \quad \text{أي}$$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)z + 4 + 4i$ و عناصره الهندسية :

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{إذن} \quad \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{النسبة :}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{إذن} \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{الزاوية :}$$

3- لاحقة w مركز التشابه :

$$\frac{4 + 4i}{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i} = \frac{4(1+i)}{\frac{1}{4}(3-i)} = \frac{16(1+i)}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{16}{4}(3+i+3i-1) = 4(2+4i)$$

إذن : لاحقة المركز w هي $8 + 16i$ منه $w(8; 16)$

التمرين 15-

1- أعط العناصر المميزة للتشابه f المعروف بشكله المركب : $z' = (1-i)z + 2-i$

2- في كل حالة من الحالات التالية عين التشابه S حيث foS يكون :

أ. تحاكي مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$

ب. انسحاب شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

الحل 15-

$$1- \quad \sqrt{2} \quad \text{إذن : نسبة التشابه f هي} \quad |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\frac{-\pi}{4} \quad \text{إذن : زاوية التشابه f هي} \quad \text{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{إذن : مركز التشابه f هو } w(-1; -2) \quad \frac{2-i}{1-1+i} = \frac{2-i}{i} \times \frac{-i}{-i} = -1-2i$$

$$2- \quad \text{ليكن S تشابه شكله المركب } z' = \alpha z + \beta \quad \text{حيث } \alpha \neq 0$$

$$z \xrightarrow{S} \alpha z + \beta \xrightarrow{f} (1-i)(\alpha z + \beta) + 2-i = \alpha(1-i)z + \beta(1-i) + 2-i$$

إذن : العبارة المركبة للتشابه foS هي :

$$z' = \alpha(1-i)z + \beta(1-i) + 2-i$$

$$1- \quad \text{ليكن H التحاكي ذو المركز O والنسبة } \frac{1}{2} \quad \text{إذن العبارة المركبة لـ H هي : } z = \frac{1}{2}z$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(1-i) &= 1/2 \\ \beta(1-i) + 2-i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{نحصل على : foS عبارة التشابه}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2(1-i)} \times \frac{1+i}{1+i} \\ \beta &= \frac{-2+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2(1-i)} \\ \beta &= \frac{-2+i}{1-i} \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \\ \beta &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \\ \beta &= \frac{-2-2i+i-1}{2} \end{aligned} \right\} \text{أي}$$

نتيجة : عبارة التشابه S المطلوبة هي : $z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

ب - ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ إذن العبارة المركبة لـ T هي : $z' = z + 1 - i$

بالمطابقة مع عبارة foS نحصل على $\begin{cases} \alpha(1-i) = 1 \\ \beta(1-i) + 2 - i = 1 - i \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \beta &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \\ \beta &= \frac{-1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \end{aligned} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1-i} \\ \beta &= \frac{1-i-2+i}{1-i} \end{aligned} \right\} \text{إذن :}$$

نتيجة : عبارة التشابه S المطلوبة هي $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

التمرين 16

S تشابه معرف بالدالة : $z \mapsto (1+i)z + 2$

1 - حدد العناصر المميزة للتشابه S وليكن I مركزه .

2 - إذا كان $S(M) = M'$ فما هي طبيعة المثلث IMM' .

3 - ما هي مجموعة النقاط E من المستوي حتى يكون $OM = OM'$ ؟

4 - ما هي مجموعة النقاط F من المستوي حتى يكون $\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = 0$ ؟

الحل - 16

1 - $|1+i| = \sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $\frac{\pi}{4}$

2 - إذن : مركز التشابه S هو $I(0; 2)$ $\frac{2}{1-1-i} = \frac{2}{-i} \times \frac{i}{i} = 2i$

2 - ليكن $M' = S(M)$ إذن : $\left. \begin{aligned} IM' &= \sqrt{2} IM \\ (\vec{IM}; \vec{IM}') &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\}$

في المثلث IMM' لدينا : $\frac{IM}{IM'} = \frac{IM}{\sqrt{2} IM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$

إذن : المثلث IMM' قائم الزاوية في M

منه حسب فيثاغورث : $IM'^2 = IM^2 + MM'^2$

أي : $2 IM^2 = IM^2 + MM'^2$ لأن $IM'^2 = (\sqrt{2} IM)^2$

أي : $MM'^2 = IM^2$

أي : $MM' = IM$

إذن : المثلث IMM' متساوي الساقين .

نتيجة : المثلث IMM' متساوي الساقين و قائم الزاوية في M

3 - ليكن $M(x; y)$

لدينا : $z' = (1+i)z + 2$

إذن : $z' = (1+i)(x+iy) + 2$

أي : $z' = x+iy+ix-y+2$

أي : $z' = (x-y+2) + i(x+y)$

إذن : $OM = OM'$ يكفي $|z| = |z'|$

يكفي $|z|^2 = |z'|^2$

$$x^2 + y^2 = (x - y + 2)^2 + (x + y)^2 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4(x - y) + 4 + x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : E هي الدائرة التي مركزها $w(-2; 2)$ و نصف قطرها 2

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{OM'} \begin{bmatrix} x - y + 2 \\ x + y \end{bmatrix} \end{array} \right\} \text{ - 4 لتكن } M(x; y) \text{ إذن :}$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0 \quad \text{منه :} \quad \text{يكافئ} \quad x(x - y + 2) + y(x + y) = 0$$

$$x^2 - xy + 2x + xy + y^2 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : F هي الدائرة التي مركزها $A(-1; 0)$ و نصف قطرها 1

تمرين - 17

تكن M و M' نقطتين من المستوي لاحتقائهما على الترتيب $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ حيث x, y, x', y' أعداد حقيقية .

فرض أن الثنائية $(x'; y')$ مرتبطة بالثنائية $(x; y)$ بالعلاقين التاليين $x' = -3x + 3y + 10$ و $y' = -3x - 3y + 5$ عبر عن z' بدلالة z ثم تعرف على التحويل النقطي المرفق .

الحل - 17

$$x' + iy' = -3x + 3y + 10 + i(-3x - 3y + 5)$$

$$= -3x + 3y + 10 - 3ix - 3iy + 5i$$

$$= -3(x + iy) - 3i(x + iy) + 10 + 5i$$

$$= (x + iy)(-3 - 3i) + 10 + 5i$$

$$\text{نتيجة : } x' + iy' = (-3 - 3i)(x + iy) + 10 + 5i$$

$$\text{أي : } z' = (-3 - 3i)z + 10 + 5i \text{ و هي عبارة عن } z' \text{ بدلالة } z$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = -3 - 3i \\ \beta = 10 + 5i \end{array} \right\} \text{ حيث } z' = \alpha z + \beta \text{ من الشكل}$$

إذن : التحويل عبارة عن تشابه مباشر .

و عناصره الهندسية كمايلي :

$$|-3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \quad \text{إذن : نسبة التشابه هي } 3\sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(-3 - 3i) = \frac{5\pi}{4} \quad \text{إذن : زاوية التشابه هي } \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{إذن : مركز التشابه هو } w(11/5; -2/5) \quad \frac{10 + 5i}{1 + 3 + 3i} = \frac{10 + 5i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i} = \frac{55 - 10i}{25}$$

تمرين - 18

A نقطة من المستوي لاحتقتها $2 + i$. S هو التشابه الذي مركزه A و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{4}$

1 - أكتب العبارة المركبة لـ S

2 - لتكن $M(x; y)$ و $M'(x'; y')$ حيث $M' = S(M)$

عبر عن x' و y' بدلالة x و y

3 - أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي صورته بالتشابه S هو المستقيم (D') ذو المعادلة $x = 3$

الحل - 18

$$\text{1 - عبارة S : } z' = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)z + a$$

$$\text{أي : } z' = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + a$$

$$2+i = \frac{a}{1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \quad \text{حيث } z' = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})z+a \quad \text{أي}$$

$$a = (2+i)(1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}) \quad \text{إن :}$$

$$= 2(1-\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + i(1-3\sqrt{2})$$

$$z' = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})z + 2 - \sqrt{2} + i(1-3\sqrt{2}) \quad \text{نتيجة : عبارة S :}$$

$$x' + iy' = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+iy) + 2 - \sqrt{2} + i(1-3\sqrt{2}) \quad -2$$

$$= \sqrt{2}x + i\sqrt{2}y + ix\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + i(1-3\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$3 - \text{صورة (D) هي (D')} \text{ ذو المعادلة } x=3 \text{ أي } x'=3$$

$$\text{منه : } x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 3 \text{ هي معادلة المستقيم (D)}$$

$$\text{أي : } y\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{أي : } y = x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ هي معادلة المستقيم (D)}$$

التمرين - 19

لتكن النقط : $A(1; 1)$ ؛ $B(-2; 0)$ ؛ $C(2; -1)$ ؛ $D(-4; -1)$
حدد التشابه S الذي يرفق بالنقطة A النقطة B وبالنقطة C النقطة D

الحل - 19

لتكن $z' = \alpha z + \beta$ العبارة المركبة للتشابه S

$$\begin{cases} \alpha(1+i) + \beta = -2 \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(2-i) + \beta = -4-i \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases}$$

$$\alpha(1+i-2+i) = -2+4+i \quad \text{بطرح (2) من (1) :}$$

$$\alpha = \frac{2+i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \frac{-2-4i-i+2}{1+4} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -i \quad \text{أي}$$

$$\beta = -2+i(1+i) = -2+i-1 = -3+i \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$z' = -iz - 3 + i \quad \text{نتيجة : عبارة التشابه S هي}$$

العناصر الهندسية لـ S :

$$\text{النسبة : } |-i| = 1$$

$$\text{الزاوية : } \text{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{-3+i}{1+i} = \frac{-3+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{-3+3i+i+1}{2} = -1+2i \quad \text{المركز :}$$

$$\text{خلاصة : S هو دوران مركزه } w(-1; 2) \text{ و زاويته } \frac{3\pi}{2}$$

التمرين - 20

لتكن النقط : $A(1; 1)$ ؛ $B(2; 0)$ ؛ $C(1; 1)$

1 - عين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C

2 - ليكن T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = (1-i)z + 2i$

أ - ما هي طبيعة التحويل T
 ب - ما هي طبيعة المثلث BMM' حيث $M' = T(M)$

الحل - 20

$$BA = |1 - 2| = 1 \quad -1$$

$$BC = |1 + i - 2| = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{2} BA \quad \text{إذن :}$$

منه : نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \text{Arg}(1 + i - 2) - \text{Arg}(1 - 2) = \text{Arg}(-1 + i) - \text{Arg}(-1) = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$$

إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$

2 - الشكل المركب لـ T : $z' = (1 - i)z + 2i$

$$|1 - i| = \sqrt{2} \quad \text{إذن : } T \text{ تشابه مباشر نسبته } \sqrt{2}$$

العناصر الهندسية لـ التشابه T :

الزاوية : $\text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\frac{2i}{1 - 1 + i} = \frac{2i}{i} = 2$ إذن : المركز هو $B(2; 0)$

ب - طبيعة المثلث BMM'

B هو مركز التشابه T و $T(M) = M'$ إذن :

$$BM' = BM \sqrt{2}$$

$$(\overrightarrow{BM'}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي} \quad (\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM'}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{BM}{BM'} = \frac{BM}{\sqrt{2} BM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \quad \text{في المثلث } BMM' \text{ لدينا :}$$

إذن : المثلث BMM' قائم الزاوية في M

منه حسب فيثاغورث فإن : $BM'^2 = BM^2 + MM'^2$

$$(\sqrt{2} BM)^2 = BM^2 + MM'^2 \quad \text{أي :}$$

$$MM'^2 = BM^2 \quad \text{أي :}$$

$$MM' = BM \quad \text{أي :}$$

أي : المثلث BMM' متساوي الساقين

خلاصة : المثلث BMM' قائم الزاوية في M و متساوي الساقين

التمرين - 21

1 - A, B, C, D نقط من المستوي لواقعها على الترتيب $1 + 2i, 5 + 2i, 1 + 4i$ و $2 - i$

1 - عين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D

ثم عين عناصره الهندسية المميزة

2 - لتكن k_0 نقطة من المستوي لاحتفها $3i$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$$k_{n+1} = S(k_n) \quad \text{و} \quad u_n = \|\overrightarrow{wk_n}\| \quad \text{حيث } w \text{ هو مركز التشابه } S$$

أ - أحسب $\|\overrightarrow{wk_n}\|$ بدلالة n

ب - ما هي طبيعة المتتالية (u_n)

ج - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الحل - 21

1 - لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(1 + 2i) + \beta = 1 + 4i & \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(2 - i) + \beta = 5 + 2i & \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = C \\ S(B) = D \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(1+2i-2+i)=1+4i-5-2i$

$$\alpha(-1+3i)=-4+2i \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \frac{-4+2i}{-1+3i} \times \frac{-1-3i}{-1-3i} \quad \text{منه :}$$

$$\alpha = \frac{4+12i-2i+6}{1+9} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = 1+i \quad \text{أي}$$

$$\beta = 1+4i-(1+i)(1+2i) \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$\beta = 1+4i-1-2i-i+2 \quad \text{أي}$$

$$\beta = 2+i \quad \text{أي}$$

نتيجة : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1+i)z + 2+i$
و عناصره الهندسية :

$$|1+i| = \sqrt{2} \quad \text{النسبة :}$$

$$\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad \text{الزاوية :}$$

$$\text{المركز : } \frac{2+i}{1-1-i} = \frac{2+i}{-i} \times \frac{i}{i} = -1+2i \quad \text{إذن المركز هو } w(-1; 2) \\ k_0(0; 3) - 2$$

$$\|\vec{w}k_0\| = |3i+1-2i| = |1+i| = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\|\vec{w}k_{n+1}\| = \sqrt{2} \|\vec{w}k_n\| \quad \text{إذن : } k_{n+1} = S(k_n) \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$\|\vec{w}k_1\| = \sqrt{2} \|\vec{w}k_0\| \quad \text{من أجل } n=0$$

$$\|\vec{w}k_2\| = \sqrt{2} \|\vec{w}k_1\| = (\sqrt{2})^2 \|\vec{w}k_0\| \quad \text{من أجل } n=1$$

$$\|\vec{w}k_3\| = \sqrt{2} \|\vec{w}k_2\| = (\sqrt{2})^3 \|\vec{w}k_0\| \quad \text{من أجل } n=2$$

$$\|\vec{w}k_n\| = (\sqrt{2})^n \|\vec{w}k_0\| \quad \text{إذن : بصفة عامة من أجل } n > 0 \text{ فإن :}$$

$$\|\vec{w}k_n\| = (\sqrt{2})^{n+1} \quad \text{نتيجة : لأن } \|\vec{w}k_0\| = \sqrt{2}$$

$$\text{ب - } u_n = (\sqrt{2})^{n+1} \quad \text{إذن : } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \sqrt{2} \text{ و حدها الأول } u_0 = \sqrt{2}$$

$$\text{ج - } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^{n+1} = +\infty$$

التمرين 22

$\theta_1, \theta_2, k_1, k_2$ أعداد حقيقية حيث $k_1 \neq 0$ و $k_2 \neq 0$

1- برهن أن مركب دورتين R_1 و R_2 زاويتاهما على الترتيب θ_1 و θ_2 هو انسحاب أو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$ أو تحاكي نسبته 1-

2- برهن أن مركب تحاكيتين H_1 و H_2 نسبتهما على الترتيب k_1 و k_2 هو انسحاب أو تحاكي نسبته $k_1 \times k_2$

الحل 22

$$1 - \text{لنكن } z' = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) + \beta_1 \text{ عبارة الدوران } R_1$$

و

$$z' = (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) + \beta_2 \text{ عبارة الدوران } R_2$$

$$z \xrightarrow{R_2} (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)z + \beta_2 \xrightarrow{R_1} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)[(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)z + \beta_2] + \beta_1$$

$$z' = (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)z + \beta_2(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) + \beta_1 \quad \text{منه عبارة } R_1 \circ R_2 \text{ هي :}$$

$$\text{لدينا : } \text{Arg}((\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)) = \theta_1 + \theta_2 \quad \text{نميز الحالات التالية :}$$

$$1 - \text{إذا كان } \theta_1 + \theta_2 = 2\pi k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ فإن } R_1 \circ R_2 \text{ هو انسحاب}$$

$$2 - \text{إذا كان } \theta_1 + \theta_2 = (2k+1)\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ فإن } R_1 \circ R_2 \text{ هو تحاكي نسبته 1-}$$

$$3 - \text{إذا كان } \theta_1 + \theta_2 \neq \pi k \text{ فإن } R_1 \circ R_2 \text{ هو دوران زاويته } \theta_1 + \theta_2 \text{ لأن :}$$

$$|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)| = 1 \times 1 = 1$$

$$2 - \text{لنكن } z' = k_1 z + \beta_1 \text{ عبارة التحاكي } H_1$$

و لنكن $z' = k_2 z + \beta_2$ عبارة التحاكي H_2

$$z \xrightarrow{H_2} k_2 z + \beta_2 \xrightarrow{H_1} k_1(k_2 z + \beta_2) + \beta_1 = k_1 k_2 z + k_1 \beta_2 + \beta_1$$

إذن : عبارة $H_1 \circ H_2$ هي : $z' = k_1 k_2 z + k_1 \beta_2 + \beta_1$:
منه نميز الحالات التالية :

- 1 - إذا كان $k_1 \times k_2 = 1$ فإن $H_1 \circ H_2$ هو انسحاب .
- 2 - إذا كان $k_1 \times k_2 \neq 1$ فإن $H_1 \circ H_2$ هو تحاكي نسبته $k_1 \times k_2$

التمرين - 23

- A ، B ، C نقط نواحقها $i + \sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ، i على الترتيب
I ، J ، K منتصفات القطع المستقيمة [OB] ، [AC] ، [BC] على الترتيب (O هي مبدأ المعلم)
- 1 - عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث $S(A) = I$ و $S(O) = B$
 - 2 - ما هي العناصر الهندسية للتشابه S
 - 3 - عين صور النقط B ، C ، I بالتشابه S
 - 4 - ليكن $S^2 = SoS$. برهن أن S^2 هو تحاكي يطلب تعيين مركزه و نسبته
 - 5 - ما هي صور النقط A ، B ، O بالتحويل S^2
 - 6 - استنتج أن المستقيمات (OC) ، (BJ) ، (AK) متقاطعة في نقطة واحدة .

الحل - 23

لدينا : $I(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ ، $J(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$ ، $K(\sqrt{2}; \frac{1}{2})$
1 - لنكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(i) + \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ \alpha(0) + \beta = \sqrt{2} & (2) \end{cases} \quad \text{بكاليف} \quad \begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases}$$

لأن لاحقة I هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

من (2) : $\beta = \sqrt{2}$
بالتعويض في (1) : $\alpha = \frac{1}{i}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2})$ أي $\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2i} \times \frac{-i}{-i}$ منه $\alpha = i \frac{\sqrt{2}}{2}$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = i \frac{\sqrt{2}}{2} z + \sqrt{2}$
2 - العناصر الهندسية :

النسبة : $\left| i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $\text{Arg}(i \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{2}$

المركز : $\frac{\sqrt{2}}{1 - i \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - i\sqrt{2}} \times \frac{2 + i\sqrt{2}}{2 + i\sqrt{2}}$

$$= \frac{4\sqrt{2} + 4i}{6}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i$$

منه المركز هو $w(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3})$

3 - من أجل $z = \sqrt{2}$: $i \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2}) + \sqrt{2} = \sqrt{2} + i$

إذن : صورة B هي النقطة $C(\sqrt{2}; 1)$

من أجل $z = i + \sqrt{2}$: $i \frac{\sqrt{2}}{2} (i + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

إذن : صورة C هي النقطة $J(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$

$$i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} i + \sqrt{2} \quad : z \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{من أجل}$$

إذن : صورة I هي النقطة $K(\sqrt{2}; \frac{1}{2})$

نتيجة : $S(I) = K$; $S(C) = J$; $S(B) = C$

$$z \xrightarrow{S} i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \sqrt{2} \xrightarrow{S} i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}z + i + \sqrt{2} \quad - 4$$

إذن : العبارة المركبة لـ S^2 هي : $z' = -\frac{1}{2}z + i + \sqrt{2}$

$$\frac{i + \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i \quad \text{منه : } S^2 \text{ هو تحاكي نسبته } -\frac{1}{2} \text{ و مركزه النقطة ذات اللاحقة } S \text{ أي مركزه هو مركز التشابه } S$$

$$S^2(O) = C \quad \text{منه} \quad O \xrightarrow{S} B \xrightarrow{S} C \quad - 5$$

$$S^2(B) = J \quad \text{منه} \quad B \xrightarrow{S} C \xrightarrow{S} J$$

$$S^2(A) = K \quad \text{منه} \quad A \xrightarrow{S} I \xrightarrow{S} K$$

بما أن S^2 هو تحاكي مركزه $W(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3})$ و K, J, C هي صور A, B, O على الترتيب بـ التحاكي S^2 فإن

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{WC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WO} \\ \overrightarrow{WJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WB} \\ \overrightarrow{WK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WA} \end{array} \right\} \quad \text{منه : } \left. \begin{array}{l} W \in (OC) \\ W \in (BJ) \\ W \in (AK) \end{array} \right\}$$

إذن : $W \in (OC) \cap (BJ) \cap (AK)$

بما أن A, B, O ليست على استقامة واحدة فإن المستقيمات $(OC), (BJ), (AK)$ تتقاطع في نقطة وحيدة هي $w(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3})$

التمرين 24

A, B نقطتان لاحتقائهما على الترتيب 12 و $9i$

f تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = -\frac{3}{4}iz + 9i$

1- برهن أن f يقبل نقطة صامدة وحيدة w احداثياتها $w(\frac{108}{25}; \frac{144}{25})$

2- برهن أن f تشابه مباشر زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{3}{4}$. ما هو مركزه ؟

3- عين صور النقط A و O بالتحويل f

4- برهن أن w هي نقطة مشتركة للدائرتين (C_1) و (C_2) ذات القطرين على الترتيب $[OA]$ و $[OB]$

5- بين أن w هي المسقط العمودي للنقطة O على (AB)

6- بين أن $wA \times wB = wO^2$

الحل 24

1- لتكن w ذات اللاحقة z نقطة من المستوي .

$$f(w) = w \quad \text{يكافئ}$$

$$z' = z \quad \text{يكافئ}$$

$$-\frac{3}{4}iz + 9i = z \quad \text{يكافئ}$$

$$9i = (1 + \frac{3}{4}i)z \quad \text{يكافئ}$$

$$9i - \frac{1}{4}(4 + 3i)z \quad \text{يكافئ}$$

$$z - \frac{36i}{4 + 3i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{36i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{144i + 108}{25} \quad \text{يكافئ}$$

$$z = \frac{108}{25} + \frac{144}{25}i \quad \text{يكافئ}$$

إذن : f يقبل نقطة صامدة وحيدة $w\left(\frac{108}{25}; \frac{144}{25}\right)$

$$f - 2 \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = -\frac{3}{4}i \\ \beta = 9i \end{array} \right\} \text{ حيث } z' = \alpha z + \beta \text{ الشكل}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{بما أن } \text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}\left(-\frac{3}{4}i\right) = -\frac{\pi}{2} \\ \text{فإن } f \text{ تشابه مباشر نسبته } \frac{3}{4} \text{ و زاويته } -\frac{\pi}{2} \\ |\alpha| = \left|-\frac{3}{4}i\right| = \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

مركز التشابه هو النقطة الصامدة إذن : المركز هو $w\left(\frac{108}{25}; \frac{144}{25}\right)$

$$z = 0 \quad \text{إذن : } z' = -\frac{3}{4}i(0) + 9i = 9i$$

منه : صورة O هي النقطة $B(0; 9)$

$$z = 12 \quad \text{إذن : } z' = -\frac{3}{4}i(12) + 9i = -9i + 9i = 0$$

منه : صورة A هي المبدأ $O(0; 0)$

4 - ليكن w_1 مركز الدائرة (C_1) إذن : w_1 هي منتصف $[OA]$ منه $w_1(6; 0)$

و ليكن w_2 مركز الدائرة (C_2) إذن : w_2 هي منتصف $[OB]$ منه $w_2(0; 9/2)$

إذن : نصف قطر الدائرة (C_1) هو 6 و نصف قطر الدائرة (C_2) هو 9/2

$$\left. \begin{array}{l} w_1 w = \left| \frac{108}{25} + \frac{144}{25}i - 6 \right| = \left| \frac{-42}{25} + \frac{144}{25}i \right| = \frac{6}{25} \sqrt{625} = 6 \\ w_2 w = \left| \frac{108}{25} + \frac{144}{25}i - \frac{9}{2}i \right| = \left| \frac{108}{25} + \frac{63}{50}i \right| = \frac{9}{50} \sqrt{25} = \frac{9}{2} \end{array} \right\} \text{ لدينا :}$$

نتيجة : $w \in (C_1) \cap (C_2)$: إذن $w \in (C_2)$ و $w \in (C_1)$

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{(WO; WB)} = -\frac{\pi}{2} \\ \overrightarrow{(WA; WO)} = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad \text{إذن :} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(O) = B \\ f(A) = O \end{array} \right. \quad -5 \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{(WA; WB)} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \quad \text{منه :}$$

إذن : النقط W ، A ، B على استقامة واحدة

منه : W هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

$$\left\{ \begin{array}{l} WB = \frac{3}{4} WO \\ WO = \frac{3}{4} WA \end{array} \right. \quad \text{إذن :} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(O) = B \\ f(A) = O \end{array} \right. \quad -6$$

$$\frac{WB}{WO} = \frac{WO}{WA}$$

أي : $WO^2 = WB \times WA$ و هو المطلوب

التمرين - 25

ABCD مستطيل حيث $AB = \sqrt{2}$ ، $AD = 1$ ، $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ ،

I منتصف [AB]

نعتبر المعلم المتعامد والمتجنس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{AB}$ و $\vec{v} = \vec{AD}$

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

1 - عين العددين α و β حيث $S(D) = C$ و $S(C) = B$

ليكن T التشابه المباشر الذي عبارته المركبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} iz + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

2 - عين نسبة و زاوية التشابه T

3 - بين أن التشابه T يحول B إلى I

4 - بين أن المستقيمين (BD) و (CI) متعامدان .

الحل - 25

1 - باعتبار المعلم المتعامد والمجانس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ فإن :

$$I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) ; C(\sqrt{2}; 1) ; D(0; 1) ; B(\sqrt{2}; 0) ; A(0; 0)$$

$$\begin{cases} \alpha(i) + \beta = \sqrt{2} + i & (1) \\ \alpha(\sqrt{2} + i) + \beta = \sqrt{2} & (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(D) = C \\ S(C) = B \end{cases}$$

$$\alpha(i - \sqrt{2} - i) = \sqrt{2} + i - \sqrt{2} \quad \text{بطرح (2) من (1) :}$$

$$-\alpha \sqrt{2} = i \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} i \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} i \quad \text{أي}$$

$$\beta = \sqrt{2} + i - i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} + i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} iz + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \quad \text{نتيجة : عبارة التشابه S هي :}$$

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} iz + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \quad \text{2 - عبارة التشابه T :}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{إذن : نسبة التشابه T هي } \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-\pi}{2} \quad \text{إذن : زاوية التشابه T هي } \text{Arg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{-\pi}{2}$$

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{3 - من أجل } z = \sqrt{2} \text{ لدينا :}$$

$$I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \quad \text{إذن : صورة B بـ التشابه T هي النقطة}$$

$$\vec{CI} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{BD} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad -4$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{CI} = -\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1)(1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{منه :}$$

إذن : المستقيمين (BD) و (CI) متعامدين .

f تحويل نقطي معرف بشكله المركب $z' = (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$

- 1 - ما هي طبيعة التحويل f وما هي عناصره المميزة ؟
- 2 - ما هي الصورة بالتحويل f للدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2

الحل - 26

1 - f من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ و $\beta = -i\sqrt{3}$ إذن : f تشابه .

2 - إذن : نسبة التشابه f هي 2 $|\alpha| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

3 - إذن : زاوية التشابه f هي $\frac{\pi}{3}$ $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \text{Arg}(2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$

4 - إذن : مركز التشابه f هو $A(1; 0)$ $\frac{-i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1$

2 - صورة النقطة O هي النقطة $w(0; -\sqrt{3})$

إذن : صورة الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2 هي الدائرة ذات المركز w

و نصف القطر $2 \times 2 = 4$ لأن النسبة هي 2

إذن : معادلة صورة الدائرة المطلوبة هي : $x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 16$

أي : $x^2 + y^2 + 2y\sqrt{3} - 13 = 0$

التمرين 27 -

S تشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

لتكن M' صورة M و N' صورة M' بالتشابه S

ليكن H المسقط العمودي للنقطة M على (AM')

برهن أن $\vec{AM'} + \vec{AH} = \vec{0}$

الحل - 27

1 - A مركز التشابه $\left. \begin{array}{l} S(M) = M' \\ \text{نسبة التشابه } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} - 1$

إذن : $\left. \begin{array}{l} \vec{AM'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{AM} \\ (\vec{AM}; \vec{AM'}) = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\}$

H مسقط عمودي لـ M على (AM') إذن : $(\vec{AH}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4}$

إذن : في المثلث القائم HMA لدينا : $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AH}{AM}$

منه : $AH = AM \cos \frac{\pi}{4}$

أي : $AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$

أي $AH = AM'$ لأن $\frac{\sqrt{2}}{2} AM = AM'$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} (\vec{AH}; \vec{AM'}) = \pi \\ AH = AM' \end{array} \right\}$ إذن : A هي منتصف [M'H]

أي : $\vec{AM'} + \vec{AH} = \vec{0}$

تمارين نماذج للباكالوريا

التمرين 1

1 - عين المجموعة (C) من النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق :

$$|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$$

2 - عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول النقطة A ذات اللاحقة i إلى المبدأ O و يحول النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى B' ذات اللاحقة $-4i$

3 - حدد العناصر الهندسية للتشابه S

4 - باستعمال نتائج السؤالين (2) و (3) أوجد المجموعة (C) المعرفة في السؤال (1)

الحل 1

1 - لنكن (x ; y) إحداثيات النقطة M

$$|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4 \quad \text{يكافئ}$$

يكافئ

يكافئ

يكافئ

$$x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3}(x + y\sqrt{3}) + y^2 + 3x^2 - 2xy\sqrt{3} + 1 - 2(y - x\sqrt{3}) = 16 \quad \text{يكافئ}$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4 - 2x\sqrt{3} - 6y - 2y + 2x\sqrt{3} = 16 \quad \text{يكافئ}$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8y = 12 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 3 \quad \text{يكافئ}$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4 \quad \text{يكافئ}$$

منه : (C) هي دائرة مركزها $w(0; 1)$ ونصف قطرها 2

2 - لنكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(i) + \beta = 0 & (1) \\ \alpha(\sqrt{3}) + \beta = -4i & (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = 0 \\ S(B) = B' \end{cases}$$

$$\alpha(i - \sqrt{3}) = 4i \quad \text{بطرح (2) من (1) :}$$

$$\alpha = \frac{4i}{-\sqrt{3} + i} \times \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} - i} \quad \text{منه :}$$

$$\alpha = \frac{-4\sqrt{3}i + 4}{3 + 1} \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{أي :}$$

$$\beta = -i(1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i \quad \text{بالتعويض في (1) :}$$

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i \quad \text{نتيجة : عبارة التشابه S هي}$$

3 - العناصر الهندسية لـ S :

$$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2 \quad \text{إذن : نسبة التشابه S هي 2}$$

$$\text{Arg}(1 - i\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3} \quad \text{إذن : زاوية التشابه S هي } \frac{-\pi}{3}$$

$$w\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; 1\right) \quad \text{إذن : المركز هو } \frac{-\sqrt{3} - i}{1 - 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} - i}{i\sqrt{3}} \times \frac{-i}{-i} = \frac{i\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

4 - نضع $M' = S(M)$ إذن : $M' \in (C)$ يكفي $|z'| = 4$
 منه : M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $(0; 0)$ و نصف قطرها 4
 إذن معادلتها $x'^2 + y'^2 = 16$

لنبحث عن عبارة x و y بدلالة x' و y' كمايلي :

$$x' + iy' = (1 - i\sqrt{3})(x + iy) - \sqrt{3} - i$$

$$x' + iy' = x + iy - ix\sqrt{3} + y\sqrt{3} - \sqrt{3} - i \quad \text{أي}$$

$$x' + iy' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} - 1) \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = y - x\sqrt{3} - 1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

نتيجة : $x'^2 + y'^2 = 6$ يكفي $16 - (x + y\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (y - x\sqrt{3} - 1)^2$ و هي نفسها معادلة المجموعة (C)
 المحصل عليها في السؤال (1)

التمرين 2

ليكن u عدد مركب حيث $u = (1 - i)z + 2i$ مع z لاحقة النقطة M

1 - باستعمال التشابه المباشر ذو المركز $A(2; 0)$ و الزاوية $\frac{-\pi}{4}$ و النسبة $\sqrt{2}$

عين مجموعة النقط M حيث $|u| = 2$

2 - أوجد نتيجة السؤال (1) دون استعمال التشابه .

الحل 2

1 - ليكن S التشابه الذي مركزه $A(2; 0)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

إذن : عبارة S هي : $z' = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] z + \beta$

$$\frac{\beta}{1 - 1 + i} = 2 \quad \text{حيث} \quad z' = (1 - i)z + \beta \quad \text{أي}$$

$$\beta = 2i \quad \text{أي}$$

نتيجة : عبارة S هي $z' = (1 - i)z + 2i$

نلاحظ أن $z' = u$

إذن : إذا كانت $M' = S(M)$ فإن u هي لاحقة النقطة M'

إذن : $|u| = 2$ يكفي $\| \overrightarrow{OM'} \| = 2$

يكافي : M' تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2

أي M' تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و تشمل $A(2; 0)$

إذن : M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها هي سابقة النقطة O بالتشابه S

$$\text{و نصف قطرها } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

نضع $S(P) = 0$

لنبحث عن z بدلالة z' :

$$z = \frac{z' - 2i}{1 - i} \quad \text{يكافي} \quad z' = (1 - i)z + 2i$$

$$\text{من أجل } z' = 0 : z = \frac{-2i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i} = 1 - i : P(1; -1) \text{ إذن}$$

منه : M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $P(1; -1)$ و نصف القطر $\sqrt{2}$

أي : مجموعة النقط المطلوبة لها المعادلة : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

2 - ليكن $z = x + iy$

$$|u|^2 = 4 \quad \text{يكافي} \quad |u| = 2$$

$$|(1 - i)(x + iy) + 2i|^2 = 4 \quad \text{يكافي}$$

$$|x + iy - ix + y + 2i|^2 = 4 \quad \text{يكافی}$$

$$|x + y + i(y - x + 2)|^2 = 4 \quad \text{بکافی}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + 4 + 4(y - x) = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4y - 4x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

وهي معادلة مجموعة النقط M المطلوبة (نتيجة السؤال (1))

أي دائرة مركزها $P(1; -1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$

التّمرين - 3

في المستوى الموجه نعتبر مربعاً مباشراً $ABCD$ ذو المركز O

لتكن P نقطة من القطعة $[BC]$ تختلف على B و C

نعمن Q نقطة تقاطع (AP) و (CD)

المستقيم (Δ) العمودي على (AP) في A يقطع (BC) في R ويقطع (CD) في S

1 - أنجز الرسم

ليكن T الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

2 - حدد صورة المستقيم (BC) بالدوران T

3- عین صور کل من R و P بالادوران T

4- ما هي طبيعة كل من المثلثين ARQ و APS

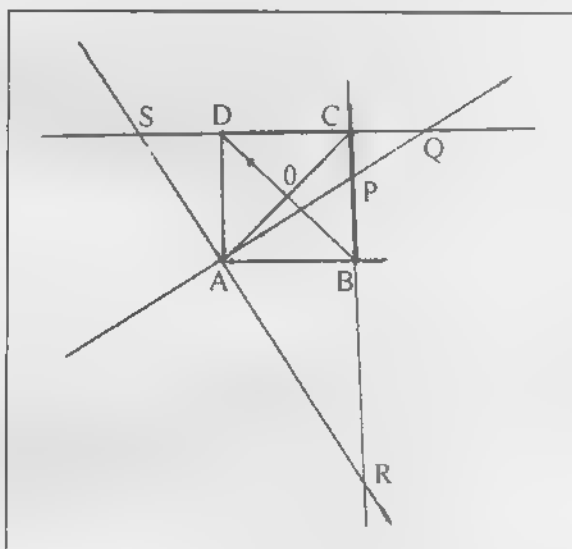
نسمی N منتصف [PS] و M منتصف [RQ]

ليكن f التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

5- عين صورة كل من R و P بالتشابه f

الحل - 3

1 - الإنشاء :



2- المستقيم (BC) شاقولي ابن صورته بالدوران T ذو الزاوية $\frac{\pi}{2}$ هو مستقيم أفقي (عمودي على (BC))

بما أن صورة B بالدوران T هي D فإن D تنتمي إلى صورة (BC) بالدوران T

و عليه فإن صورة المستقيم (BC) بالدوران T هي المستقيم (DC)

3- لتكن $P' = T(P)$

(AS) و (DC) هي نقطة تقاطع (AS) و (DC)
$$\left\{ \begin{array}{l} P' \in (CD) : \text{إن } P \in (BC) \\ P' \in (AS) : \text{إن } (\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{AP'}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$
 إذن : $P' = S$ أي : $T(P) = S$

$R' = T(R)$ لتكن

(CD) $R \in (CB)$ اذن : $R' \in (CD)$ لأن صورة (CB) بالتشابه T هي (CD)

$$(AP) \perp (AR) \text{ لأن } R \in (AP) : \text{إذن } (\overrightarrow{AR}; \overrightarrow{AR'}) = \frac{\pi}{2}$$

نتيجة : $R' \in (AP) \cap (CD)$

أي R' تنطبق على Q

منه : $T(R) = Q$

$$\left. \begin{array}{l} AR = AQ \\ (\vec{AR}; \vec{AQ}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} - 4 \quad \text{إذن : المثلث } ARQ \text{ قائم في } A \text{ و متساوي الساقين .}$$

$$\left. \begin{array}{l} AS = AP \\ (\vec{AP}; \vec{AS}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad \text{إذن : المثلث } ASP \text{ قائم في } A \text{ و متساوي الساقين .}$$

$$\left. \begin{array}{l} AN = \frac{SP}{2} \\ (\vec{AP}; \vec{AN}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} - 5 \quad \text{[PS] هو وتر المثلث } ASP \text{ و } N \text{ منتصف [PS] إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} AM = \frac{RQ}{2} \\ (\vec{AR}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \text{[RQ] هو وتر المثلث } ARQ \text{ و } M \text{ منتصف [RQ] إذن :}$$

$$\begin{array}{ll} SP^2 = AS^2 + AP^2 & \text{في المثلث القائم } ASP \\ SP^2 = 2 AP^2 & \text{إذن :} \\ SP = AP\sqrt{2} & \text{منه :} \end{array}$$

$$AN = \frac{SP}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} AP \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{array}{ll} RQ^2 = AR^2 + AQ^2 & \text{في المثلث القائم } ARQ \\ RQ^2 = 2 AR^2 & \text{إذن :} \\ RQ = AR\sqrt{2} & \text{منه :} \end{array}$$

$$AM = \frac{RQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} AR \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} AN = \frac{\sqrt{2}}{2} AP \\ (\vec{AP}; \vec{AN}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \text{خلاصة :} \quad \text{إذن : } f(P) = N$$

$$\left. \begin{array}{l} AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AR \\ (\vec{AR}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \text{إذن : } f(R) = M$$

التعريف 4 -

في المستوي الموجه ABC مثلث حيث $AB = 2$ ، $AC = 1 + \sqrt{5}$ ، $(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$

1 - عين نسبة و زاوية التشابه S الذي يحول B إلى A و يحول A إلى C نسمي w مركز التشابه S

2 - بين أن w تنتمي إلى لدائرة ذات القطر $[AB]$

لتكن D صورة النقطة C بالتشابه S

3 - برهن استقامة النقط B ، w ، C .

4 - برهن أن $CD = 3 + \sqrt{5}$

الحل - 4

لننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث :

$$\vec{AB} = 2\vec{u} \quad ; \quad \vec{AC} = (1 + \sqrt{5})\vec{v}$$

$$\text{إذن : } A(0; 0) \quad ; \quad B(2; 0) \quad ; \quad C(0; 1 + \sqrt{5})$$

1 - لنكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(2) + \beta = 0 & \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(0) + \beta = (1 + \sqrt{5})i & \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(B) = A \\ S(A) = C \end{cases}$$

من (2) : $\beta = (1 + \sqrt{5})i$

بالتعويض في (1) : $\alpha = \frac{-(1 + \sqrt{5})}{2}$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z' = \frac{-(1 + \sqrt{5})}{2} i z + (1 + \sqrt{5}) i$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{-(1 + \sqrt{5})}{2} i \right| &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{Arg} \left(\frac{-(1 + \sqrt{5})}{2} i \right) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{نما أن}$$

فإن : نسبة التشابه S هي $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ وزاويته هي $-\frac{\pi}{2}$

2 - لاحقة النقطة w مركز التشابه S هي : $\frac{(1 + \sqrt{5})i}{1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)i} = \frac{2(1 + \sqrt{5})i}{2 + (1 + \sqrt{5})i}$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{5})i [2 - (1 + \sqrt{5})i]}{[2 + (1 + \sqrt{5})i][2 - (1 + \sqrt{5})i]}$$

$$= \frac{4i(1 + \sqrt{5}) + 2(1 + \sqrt{5})^2}{4 + (1 + 5 + 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{5})^2 + 4(1 + \sqrt{5})i}{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5})^2 + 2(1 + \sqrt{5})i}{5 + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{5})^2 + 2(1 + \sqrt{5})i}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} i$$

$$w \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} ; \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{منه :}$$

لدينا معادلة الدائرة ذات القطر [AB] هي : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
أي : $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) &= \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5} + 4 - 2\sqrt{5} - 10}{5} \end{aligned}$$

$= 0$ إذن : فعلا w تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AB]

$$\text{من جهة أخرى :} \quad \vec{wB} \begin{pmatrix} 2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ 0 - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 + \sqrt{5} - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right| &= -\frac{4}{\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5}) \left(2 - \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} - (2 - \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} - (2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 + 2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} - (\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\vec{BC} // \vec{wB} : \text{إذن } = 0$$

منه : النقط w, B, C على استقامة واحدة .
 $z' = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2} i (1+\sqrt{5}) i + (1+\sqrt{5}) i$ لدينا $z = (1+\sqrt{5}) i$ من اجل 3 -

$$z' = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} + (1+\sqrt{5}) i \quad \text{أي}$$

$$z' = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} + (1+\sqrt{5}) i \quad \text{أي :}$$

$$z' = (3+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5}) i \quad \text{أي :}$$

إذن : لاحقة النقطة D هي $(3+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5}) i$
 منه : $CD = |(3+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5}) i - (1+\sqrt{5}) i|$

$$= |3+\sqrt{5}|$$

هو المطلوب $= 3+\sqrt{5}$

التمرين 5 -

A نقطة لاحقتها $2+i$

H تحاكى مركزه A ونسبته $1/2$

S تحويل نقطي للمستوي عمارته المركبة $z' = i\bar{z} + 1 - i$

ليكن T تحويل نقطي حيث $T = SoH$

1 - عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S ثم استنتج طبيعته

2 - عين الشكل المركب للتحويل T

3 - أثبت أن T يقبل نقطة صامدة وحيدة هي A

الحل 5 -

1 - لتكن $z = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان

تكون w ذات اللاحقة z صامدة بـ التحويل S إذا و فقط إذا كان :

$$i\bar{z} + 1 - i = z \quad \text{أي : } S(w) = w$$

$$i(x - iy) + 1 - i = x + iy \quad \text{أي :}$$

$$ix + y + 1 - i = x + iy \quad \text{أي :}$$

$$ix + y + 1 - i - x - iy = 0 \quad \text{أي}$$

$$1 - x + y + i(x - y - 1) = 0 \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} 1 - x + y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} 1 - x + y = 0 \\ 1 - x + y = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} 1 - x + y = 0 \\ 1 - x + y = 0 \end{cases}$$

أي $1 - x + y = 0$ منه : مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S هي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $1 - x + y = 0$

لتكن $M(x; y)$ و $M'(x'; y')$

$$x' + iy' = i(x - iy) + 1 - i \quad \text{يكافئ} \quad M' = S(M)$$

$$x' + iy' = y + 1 + i(x - 1) \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= y + 1 \\ y' &= x - 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} -(x - y + 1) \\ (x - y - 1) \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} y + 1 - x \\ x - 1 - y \end{pmatrix}$$

$$\text{من جهة أخرى شعاع توجيه المستقيم } (\Delta) \text{ هو : } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = (-1)(-1) + (-1)(-1) = 0 \quad \text{منه :}$$

إذن : $\overrightarrow{MM'}$ عمودي على (Δ)

لتكن w منتصف $[MM']$

$$\text{إذن : } w \left(\frac{x + y + 1}{2} ; \frac{y + x - 1}{2} \right)$$

بالتعويض في معادلة (L) :

$$1 - \frac{x + y + 1}{2} + \frac{y + x - 1}{2} = 1 + \frac{-x - y - 1 + y + x - 1}{2} = 1 - 1$$

$$w \in (\Delta) : \text{ إذن } = 0$$

نتيجة : M' هي نظيرة M بالنسبة إلى (Δ)

إذن : التحويل S هو تناظر عمودي بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $1 - x + y = 0$ أي $y = x - 1$

2 - لنبحث عن الشكل المركب لـ H :

$$\frac{\beta}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + i \quad \text{حيث } z' = \frac{1}{2}z + \beta$$

$$\beta = \frac{1}{2}(2 + i) = 1 + \frac{1}{2}i \quad \text{أي :}$$

$$z' = \frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}i \quad \text{إذن : عبارة } H \text{ هي}$$

$$z \xrightarrow{H} \frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}i \xrightarrow{S} i \left(\frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}i \right) + 1 - i \quad \text{التركيب :}$$

$$\text{منه : } SoH(z) = i \left(\frac{1}{2}\bar{z} + 1 - \frac{1}{2}i \right) + 1 - i$$

$$= \frac{1}{2}i\bar{z} + i + \frac{1}{2} + 1 - i$$

$$= \frac{1}{2}i\bar{z} + \frac{3}{2}$$

$$z' = \frac{1}{2}i\bar{z} + \frac{3}{2} \quad \text{إذن : الشكل المركب لـ } T :$$

3 - لتكن w ذات اللاحقة z حيث $z = x + iy$

w صامدة بـ T إذا و فقط إذا كان $T(w) = w$

$$z' = z \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{2}i\bar{z} + \frac{3}{2} = z \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2}i(x-iy) + \frac{3}{2} - x + iy \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2}ix + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} - x - iy = 0 \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2}y - x + \frac{3}{2} + i(\frac{1}{2}x - y) = 0 \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ \frac{1}{2}y - x + \frac{3}{2} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots x - 2y = 0 \\ (2) \dots y - 2x + 3 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{أي}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في 2 : $2x - 4y = 0$ (3)

نجمع (3) و (2) : $y - 2x + 3 + 2x - 4y = 0$

$$-3y + 3 = 0 \quad \text{أي}$$

$$y = 1 \quad \text{أي}$$

$$x = 2y = 2 \quad \text{في (1)}$$

نتيجة : التحويل T له نقطة صامدة وحيدة $w(2; 1)$ أي w تنطبق على A

تمرين 6 -

S تشابه غير مباشر يحول النقطة A إلى B و النقطة C إلى D

عين العبارة المركبة للتشابه S إذا كانت لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب هي $-3i$ ، 3 ،

$$-3-2i \text{ ، } 3-2i$$

تحليل 6 -

S تشابه غير مباشر إذن عبارته $z' = \alpha \bar{z} + \beta$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(3i) + \beta = 3 \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(3+2i) + \beta = -3-2i \dots\dots (2) \end{array} \right. \quad \text{إذن} \quad \left\{ \begin{array}{l} S(A) = B \\ S(C) = D \end{array} \right.$$

$$\alpha(3i - 3 - 2i) = 3 + 3 + 2i \quad \text{طرح (2) من (1) :}$$

$$\alpha = \frac{6+2i}{-3+i} \times \frac{-3-i}{-3-i} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-18-6i-6i+2}{10} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{-16-12i}{10} \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i \quad \text{أي}$$

$$\beta = 3 - 3i(-\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i) \quad \text{التعويض في (1) :}$$

$$= 3 + \frac{24}{5}i - \frac{18}{5}$$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{24}{5}i$$

$$z' = (-\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i)\bar{z} - \frac{3}{5} + \frac{24}{5}i \quad \text{نتيجة : عبارة التشابه S هي}$$

التمرين 7 -

S تحويل نقطي عبارته $z' = -5i\bar{z} + 1 + i$

1 - أوجد معادلة لصورة المستقيم (AB) حيث A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $1+2i$ و 2

2 - عين صورة الدائرة ذات المركز $I(3; 1)$ و نصف القطر $\sqrt{5}$ بالتحويل S

الحل - 7

نضع $z' = x' + iy'$ و $z = x + iy$

$$x' + iy' = -5i(x + iy) + 1 + i \quad \text{يكافئ} \quad z' = -5i\bar{z} + 1 + i$$

$$x' + iy' = -5ix - 5y + 1 + i \quad \text{يكافئ}$$

$$x' + iy' = 1 - 5y + i(1 - 5x) \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x' = 1 - 5y \\ y' = 1 - 5x \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \text{و هو الشكل التحليلي للتحويل S}$$

1 - لنبحث عن معادلة المستقيم (AB) :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} // \vec{BM} \quad \text{يكافئ} \quad M(x; y) \in (AB)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{يكافئ} \quad y = -2x + 4 \quad \text{وهي معادلة (AB)}$$

1 - لنبحث عن عبارة x و y بدلالة x' و y' في التحويل S :

$$\begin{cases} y = \frac{1-x'}{5} \\ x = \frac{1-y'}{5} \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x' = 1 - 5y \\ y' = 1 - 5x \end{cases}$$

$$y = -2x + 4 \quad \text{معادلة (AB) هي}$$

$$\frac{1-x'}{5} = -2\left(\frac{1-y'}{5}\right) + 4 \quad \text{إذن : معادلة صورة (AB) هي :}$$

$$1 - x' = -2 + 2y' + 20 \quad \text{أي :}$$

$$2y' = 1 - x' + 2 - 20 \quad \text{أي :}$$

$$y' = -\frac{1}{2}x' - \frac{17}{2} \quad \text{أي :}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{17}{2} \quad \text{نتيجة : صورة (AB) بالتحويل S هو المستقيم ذو المعادلة}$$

2 - لتكن (C) الدائرة ذات المركز I(3; 1) ونصف القطر $\sqrt{5}$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \quad \text{معادلة (C) :}$$

$$\left(\frac{1-y'}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{1-x'}{5} - 1\right)^2 = 5 \quad \text{إذن : معادلة صورة (C) هي :}$$

$$\left(\frac{1-y'-15}{5}\right)^2 + \left(\frac{1-x'-5}{5}\right)^2 = 5 \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{14+y'}{5}\right)^2 + \left(\frac{x'+4}{5}\right)^2 = 5 \quad \text{أي :}$$

$$(y' + 14)^2 + (x' + 4)^2 = 125 \quad \text{أي :}$$

$$(x' + 4)^2 + (y' + 14)^2 = (5\sqrt{5})^2 \quad \text{أي :}$$

$$\text{إذن : صورة (C) هي الدائرة التي مركزها } w(-4; -14) \text{ و نصف قطرها } 5\sqrt{5}$$

ملاحظة : يمكن الاجابة باستعمال خواص التشابه كما يلي :

$$S \quad \text{تشابه نسبته} \quad | -5i | = 5$$

$$\text{إذن : صورة الدائرة (C) بـ } S \text{ هي الدائرة التي مركزها } w \text{ حيث } w = S(I) \text{ و نصف قطرها } 5\sqrt{5}$$

البحث عن w : S(I)

$$\text{من أجل } z = 3 + i \quad \text{فإن} \quad z' = -5i(3 - i) + 1 + i$$

$$= -15i - 5 + 1 + i$$

$$= -14i - 4$$

إذن : $w(-4; -14)$ منه : معادلة صورة (L) بالتشابه S هي : $(x+4)^2 + (y+14)^2 = (5\sqrt{5})^2$ التمرين 8 A_0, A_1, A_2 : نقاط لواحقها على الترتيب : $z_0 = 5 - 4i$; $z_1 = -1 - 4i$; $z_2 = -4 - i$ 1- عين الكتابة المركبة للتشابه S الذي يحول A_0 إلى A_1 و A_1 إلى A_2

2- استنتج نسبة و زاوية و مركز التشابه S

ليكن w مركز التشابه S حيث t لاحقة w

ليكن M و M' نقطتين من السوي لاحتقائهما على الترتيب z و z' حيث $z \neq t$ و $S(M) = M'$ 3- تحقق أن : $t - z' = i(z - z')$ ثم استنتج طبيعة المثلث wMM' من أجل كل عدد طبيعي n نعرف النقطة A_{n+1} بـ : $A_{n+1} = S(A_n)$ و نضع $u_n = \|A_n A_{n+1}\|$ 4- برهن أن المتتالية (u_n) هندسيةنعرف المتتالية (v_n) على \mathbb{N} بـ : $v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ 5- عبر عن v_n بدلالة n6- هل المتتالية (v_n) مقاربة ؟الحل 8- لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(5 - 4i) + \beta = -1 - 4i \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(-1 - 4i) + \beta = -4 - i \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{كافئ} \quad \begin{cases} S(A_0) = A_1 \\ S(A_1) = A_2 \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(5 - 4i + 1 + 4i) = -1 - 4i + 4 + i$

$$6\alpha = 3 - 3i \quad \text{أي}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أي}$$

$$\beta = -1 - 4i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(5 - 4i) \quad \text{بالتعويض في (1)}$$

$$\beta = -1 - 4i - \frac{5}{2} + 2i + \frac{5}{2}i + 2 \quad \text{أي}$$

$$\beta = 1 - \frac{5}{2} - 2i + \frac{5}{2}i \quad \text{أي}$$

$$\beta = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{أي}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{سجّة : عبارة التشابه S}$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{النسبة :}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{الزاوية :}$$

$$\text{المركز : } \frac{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{-3 + i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{-3 + 3i + i + 1}{2} = -1 + 2i$$

- t لاحقة w إذن : $t = -1 + 2i$

$$t - z' = -1 + 2i - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right] \quad \text{إذن :}$$

$$= -1 + 2i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$$

$$i(z - z') - iz - iz'$$

من جهة أخرى :

$$iz - i\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$iz - \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)z + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= z\left(i - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= z\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$$

$$= t - z'$$

$$|i(z - z')| = |t - z'| \quad \text{منه} \quad i(z - z') = t - z' \quad \text{نتيجة :}$$

$$|z - z'| = |t - z'| \quad \text{أي}$$

$$MM' = wM' \quad \text{أي}$$

إذن : wMM' مثلث متساوي الساقين

$$\text{و بما أن } \overrightarrow{(wM; wM')} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{فإن : المثلث } wMM' \text{ قائم في } M'$$

أي : wMM' قائم في M' و متساوي الساقين4 - لتكن z_n لاحقة A_n ، z_{n+1} لاحقة A_{n+1}

$$t - z_{n+1} = i(z_n - z_{n+1}) \quad \text{إذن : } S(A_n) = A_{n+1}$$

$$|t - z_{n+1}| = |z_n - z_{n+1}| \quad \text{منه :}$$

$$\|\overrightarrow{wA_{n+1}}\| = \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| \quad \text{أي}$$

$$wA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} wA_0 \quad \text{لدينا نسبة التشابه } S \text{ هي } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ إذن :}$$

$$wA_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} wA_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 wA_0$$

$$wA_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} wA_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 wA_0$$

$$wA_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} wA_0$$

$$\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} wA_0 \quad \text{إذن :}$$

$$|t - z_0| = |-1 + 2i - 5 + 4i| = |-6 + 6i| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \quad \text{لحسب } wA_0 :$$

$$\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times 6\sqrt{2} \quad \text{منه :}$$

$$6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \quad \text{أي : } u_n = 6\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \quad \text{إذن : } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ وحدها الأول } 6$$

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- 5

$$u_0 \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) \times \frac{2}{\sqrt{2}-2} \\
&= \frac{12}{\sqrt{2}-2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} &= 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{12}{\sqrt{2}-2} \times (-1) = -6 \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \frac{12}{2-\sqrt{2}} \text{ أي :}
\end{aligned}$$

التمرين 9 -

نقط من المستوى نواحقها على الترتيب A, B, C, D, E, F, G, H ، $1 - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i$ ،

$$1+i, 3+i, 3-i, 1-i, \frac{1}{2}i, 1+\frac{1}{2}i$$

C_1 هو المربع ذو الرؤوس A, B, C, D و المركز O_1

C_2 هو المربع ذو الرؤوس E, F, G, H و المركز O_2

نضع $S_1 = \{A; B; C; D\}$ و $S_2 = \{E; F; G; H\}$

1- مثل النقط A, B, C, D, E, F, G, H

2- ليكن H التحاكي ذو المركز $w(-1; 0)$ و النسبة 2

أكتب العبارة المركبة للتحاكي H ثم بين أن H يحول S_1 إلى S_2

3- ليكن S التشابه الذي يحول S_1 إلى S_2 و g التحويل النقطي المعرف بـ $g = H^{-1} \circ S$ حيث H^{-1} هو

التحاكي الذي مركزه $w(-1; 0)$ و نسبته $1/2$

(أ) ما هي نسبة التشابه S

(ب) أثبت أن G تقايس و أن S_1 مجموعة صامدة إجمالياً بـ g

(ج) برهن أن $g(O_1) = O_1$

(د) استنتج أن g هو أحد التحويلات التالية : التحويل المطابق ، دوران R_1 ذو المركز O_1 و الزاوية π ، دوران

R_2 ذو المركز O_1 و الزاوية $\pi/2$ ، دوران R_3 مركزه O_1 و زاويته $-\pi/2$

(هـ) عين العبارات المركبة لكل من HoR_1, HoR_2, HoR_3

(و) استنتج المركز w_1, w_2, w_3 لكل من التشابهات HoR_1, HoR_2, HoR_3 على الترتيب .

الحل 9 -

1 -

2 - ليكن $z' = 2z + \beta$ عبارة التحاكي H

المركز هو w إذن : $\frac{\beta}{1-2} = -1$ منه $\beta = 1$

إذن : عبارة التحاكي H هي : $z' = 2z + 1$

لدينا O_1 مركز S_1 إذن : $O_1(1/2; 0)$

و O_2 مركز S_2 إذن : $O_2(2; 0)$

من أجل $z = 1/2$ فإن : $z' = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$ إذن : $H(O_1) = O_2$

طول ضلع المربع C_1 هو 1

طول ضلع المربع C_2 هو 2 حيث $2 = 2 \times 1$ (نسبة التحاكي H هي 2)

نتيجة : S_2 هو صورة S_1 بالتحاكي H

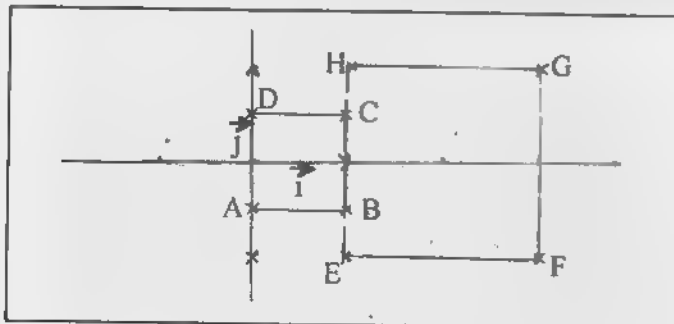
3 - (أ) S تشابه يحول S_1 إلى S_2 إذن : نسبة التشابه S هي 2 و يحقق $S(O_1) = O_2$

(ب) $g = H^{-1} \circ S$ نسبة التشابه H^{-1} هي $1/2$ إذن : g هو تشابه نسبته 1 (جداء نسبتي S و H^{-1})

نسبة التشابه S هي 2 إذن : g هو تقايس

من جهة أخرى : $g(O_1) = H^{-1}[S(O_1)] = H^{-1}(O_2) = O_1$

$g(C_1) = C_1$ إذن :



$$g(S_1) = S_1 \quad \text{أي :}$$

أي S_1 مجموعة صامدة إجمالاً بـ g

$$g(O_1) = H^{-1}(O_2) \quad \text{منه :} \quad g(O_1) = H^{-1}[S(O_1)] \quad (\rightarrow)$$

$$\vec{wO_1} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \vec{wO_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{1}{2} \vec{wO_2} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{منه} \quad \vec{wO_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \vec{vO_2} \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{بما أن :} \quad \vec{wO_1} = \frac{1}{2} \vec{wO_2} \quad \text{فإن} \quad O_1 = H^{-1}(O_2) \quad \text{منه :} \quad g(O_1) = H^{-1}(O_2) = O_1 \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$g(S_1) = S_1 \quad \text{لدينا (ج)}$$

إذن : النقطة D تتحول إما إلى نفسها D ، أو إلى C أو إلى B أو إلى A
نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $g(D) = D$ إذن : g هو التحويل المطابق

الحالة (2) $g(D) = C$ إذن : g دوران مركزه O_1 وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ وليكن R_3

الحالة (3) $g(D) = B$ إذن : g دوران مركزه O_1 وزاويته π وليكن R_1

الحالة (4) $g(D) = A$ إذن : g دوران مركزه O_1 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وليكن R_2

(هـ) عبارة R_1 :

$$\beta = 1 \quad \text{منه} \quad \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{حيث} \quad z' = -z + \beta$$

إذن : عبارة R_1 هي $z' = -z + 1$

$$z \xrightarrow{R_1} -z + 1 \xrightarrow{H} 2(-z + 1) + 1 = -2z + 3 \quad \text{منه :}$$

إذن : عبارة HoR_1 هي $z' = -2z + 3$

عبارة R_2 :

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{منه} \quad \frac{\beta}{1-i} = \frac{1}{2} \quad \text{حيث} \quad z' = iz + \beta$$

إذن : عبارة R_2 هي $z' = iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$$z \xrightarrow{R_2} iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \xrightarrow{H} 2(iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) + 1 = 2iz + 2 - i \quad \text{منه :}$$

إذن : عبارة HoR_2 هي $z' = 2iz + 2 - i$

عبارة R_3 :

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{منه} \quad \frac{\beta}{1+i} = \frac{1}{2} \quad \text{حيث} \quad z' = -iz + \beta$$

منه : عبارة R_3 هي $z' = -iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$$z \xrightarrow{R_3} -iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \xrightarrow{H} 2(-iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) + 1 = -2iz + 2 + i \quad \text{إذن :}$$

إذن : عبارة HoR_3 هي $z' = -2iz + 2 + i$

(و) المركز :

$$\frac{3}{1+2} = 1 \quad \text{إذن :} \quad w_1(1; 0) \quad \text{هو مركز التشابه} \quad HoR_1$$

$$HoR_2 \quad \text{هو مركز} \quad w_2\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) \quad \text{إذن :} \quad \frac{2-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2+4i-i+2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\text{HoR}_3 \text{ هو مركز } w_3 \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right) : \text{إن} \frac{2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i+i+2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

التمرين - 10

T تحويل نقطي للمستوي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z'

$$z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i \quad \text{حيث}$$

1 - ما هي طبيعة التحويل T ؟

2 - لتكن z'' لاحقة النقطة M'' حيث M'' = T(M')

عين z'' بدلالة z

3 - عين طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة

4 - برهن أن T هو مركب تناظر محوري ذو المحور (xx') و تشابه S يطلب تحديد عناصره

5 - برهن أن T هو مركب لتحاكى ذو المركز A و النسبة -3 و التناظر المحوري ذو المحور المستقيم (d) الذي

يشمل A و معامل توديبه 1 حيث A هو مركز التشابه S

الحل - 10

$$z \xrightarrow{S} \bar{z} \xrightarrow{P} -3i\bar{z} + 2 + 6i \quad -1$$

إذن : T هو مركب التناظر المحوري S بالنسبة إلى محور الفواصل و التشابه المباشر P الذي نسبته 3

إذن : T هو تشابه غير مباشر نسبته 3 و مركزه النقطة الصامدة A كمايلي :

لتكن A(x; y) صامدة

$$x + iy = -3i(x - iy) + 2 + 6i$$

$$x + iy = -3ix - 3y + 2 + 6i \quad \text{أي}$$

$$(x + 3y - 2) + i(3x + y - 6) = 0 \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{array} \right\} \text{ أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2 \\ y = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} : \text{إن} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8$$

إذن : مركز التشابه T هو A(2; 0)

$$\begin{aligned} z \xrightarrow{T} z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i & \xrightarrow{T} z'' = -3i(-3i\bar{z} + 2 + 6i) + 2 + 6i \quad -2 \\ & = -3i(3iz + 2 - 6i) + 2 + 6i \\ & = 9z - 6i - 18 + 2 + 6i \end{aligned}$$

$$z' = 9z - 16 \quad \text{إذن : عبارة ToT هي } z' = 9z - 16$$

3 - طبيعة التحويل ToT :

$$\frac{-16}{1-9} = 2 \quad \text{ToT هو تحاكى نسبته 9 و مركزه } w \text{ ذات اللاحقة } z$$

أي مركز التحاكى ToT هو النقطة A(2; 0)

4 - ليكن P التناظر المحوري بالنسبة إلى (xx') إذن عبارته z' = \bar{z}

و ليكن S تشابه مباشر عبارته : z' = -3iz + 2 + 6i

$$z \xrightarrow{P} \bar{z} \xrightarrow{S} -3i\bar{z} + 2 + 6i \quad \text{إذن :}$$

منه : T = SoP

العناصر الهندسية للتشابه S :

$$|-3i| = 3 \quad \text{النسبة :}$$

$$\text{الزاوية : } \text{Arg}(-3i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{المركز : } \frac{2+6i}{1+3i} = \frac{2(1+3i)}{1+3i} = 2 \quad \text{إذن : المركز هو } A(2; 0)$$

5 - ليكن S التحاكى ذو المركز A و النسبة -3

عبارة $S: z' = -3z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+3} = 2$ أي $\beta = 8$

منه عبارة S هي $z' = -3z + 8$

نفرض وجود تحويل نقطي P حيث $SoP = T$

ليكن S^{-1} التحاكي الذي مركزه $A(2; 0)$ ونسبته $-\frac{1}{3}$ إذن عبارة S^{-1} هي $z' = -\frac{1}{3}z + \beta$

حيث $\frac{\beta}{1+\frac{1}{3}} = 2$ منه $\beta = \frac{8}{3}$

منه عبارة S^{-1} هي $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{8}{3}$

لدينا $SoP = T$ منه $S^{-1}oSoP = S^{-1}oT$

أي: $P = S^{-1}oT$ لأن $S^{-1}oS$ هو تحويل مطابق

لنبحث إذن عن عبارة $S^{-1}oT$ كمايلي:

$$z \xrightarrow{T} -3i\bar{z} + 2 + 6i \xrightarrow{S^{-1}} z' = -\frac{1}{3}[-3i\bar{z} + 2 + 6i] + \frac{8}{3}$$

$$= i\bar{z} - \frac{2}{3} - 2i + \frac{8}{3}$$

$$= i\bar{z} + 2 - 2i$$

إذن: عبارة التحويل P حيث $SoP = T$ هي $z' = i\bar{z} + 2 - 2i$

لنبحث الآن عن طبيعة التحويل P كمايلي:

عبارة x' و y' بدلالة x و y :

$$x' + iy' = i(x - iy) + 2 - 2i$$

$$x' + iy' = ix + y + 2 - 2i \quad \text{أي}$$

$$x' + iy' = y + 2 + i(x - 2) \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases} \quad \text{أي}$$

النقط الصامدة:

$$\begin{cases} y - x + 2 = 0 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$y - x + 2 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

إذن: النقط الصامدة بالنحويل P هي المستقيم (d) ذو المعادلة $y - x + 2 = 0$

منتصف $[MM']$: لنكن w منتصف $[MM']$ حيث $M' = P(M)$

$$w \left(\frac{x+y+2}{2}; \frac{x-2+y}{2} \right) \quad \text{إذن:}$$

بالتعويض في معادلة (d) :

$$\frac{x-2+y}{2} - \frac{x+y+2}{2} + 2 = \frac{x-2+y-x-y-2}{2} + 2$$

$$= 2 - 2$$

$$w \in (d) \quad \text{إذن: } = 0$$

وضعية (MM') بالنسبة إلى المستقيم (d)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (d) \text{ له شعاع توجيه}$$

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} y+2-x \\ x-2-y \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = -1(y+2-x) - (x-2-y) \quad \text{منه:}$$

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'} : \text{إذن } 0 = -y^2 + x - x + 2 + y$$

منه : (MM') عمودي على (d)

خلاصة : M' هي نظيرة النقطة M بالنسبة إلى المستقيم (d)

هل A ∈ (d) ؟ A(2 ; 0) : إذن 0 - 2 + 2 = 0

إذن : فعلا A تنتمي إلى (d)

معامل توجيه (d) : (d) له المعادلة y - x + 2 = 0 أي y = x + 2

منه : معامل توجيه (d) هو 1

نتيجة : التحويل P هو تناظر محوري بالنسبة إلى المستقيم (d) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه 1

التمرين - 11

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - z_1} \quad , \quad z_1 = \sqrt{2}(1 - i) \quad \text{ليكن}$$

1 - أكتب العدد z_1 على شكله المثلثي

2 - برهن أن $z_2 = -i$

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحتقائهما على الترتيب $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}(-x + y + 1) - 1 \end{cases} \quad \text{حيث S تحويل نقطي يرفق بـ كل نقطة M النقطة M'}$$

3 - أكتب z' بدلالة z

4 - استنتج الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل S

ليكن (Δ) مستقيم معادلته $x + y + 1 = 0$

5 - أكتب معادلة المستقيم (d) صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S

6 - أكتب العبارة المركبة للتحويل SoS

7 - برهن أن SoS هو تشابه مباشر

8 - قارن بين العناصر المميزة لـ S و SoS

الحل - 11

$$|z_1| = \sqrt{2} |1 - i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \quad \text{إذن : } z_1 = \sqrt{2}(1 - i) \quad \text{1 -}$$

لتكن θ عمدة لـ z_1

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad \text{منه : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$z_1 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{نتيجة :}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \quad \text{2 -}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2 - 2i + (-1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})i + \sqrt{2}(-1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2 - 2i - i + i\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2i - \sqrt{2} + 2}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2}$$

$$= \frac{(-5 + 2\sqrt{2})i}{5 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-(5-2\sqrt{2})}{5-2\sqrt{2}} i$$

$$= -i$$

$$x' + iy' = \sqrt{2}(x+y+1) + i[\sqrt{2}(-x+y+1) - 1]$$

$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} + i(-x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$$

$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - x\sqrt{2}i + y\sqrt{2}i + i\sqrt{2} - i$$

$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2}i - x\sqrt{2}i + y\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$= \sqrt{2}(x+iy) - i\sqrt{2}(x+iy) + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

$$(x+iy)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

منه : $z' = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$ و هو المطلوب

4 - طبيعة التحويل S :

النسبة : $|\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$ إذن : S تشابه نسبته 2

الزاوية : $\text{Arg}(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$

المركز : $-\frac{\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = -i$ (حسب السؤال (1)) إذن : مركز التشابه S هو $w(0; -1)$

5 - نعلم أن صورة مستقيم بتشابه هو مستقيم

بما أن $x+y+1=0$ ، $v' = \sqrt{2}(x+y+1)$ (معادلة Δ)

فإن : $x' = \sqrt{2}(0) = 0$

منه : معادلة المستقيم (d) هي $x' = 0$ أي (d) هو محور الترتيب

$$z \xrightarrow{S} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z + \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)i \xrightarrow{S} z' = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})[(\sqrt{2} - i\sqrt{2})z + \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)i] + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

$$= -4iz + \sqrt{2}(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)i + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i$$

$$= -4iz + 2 - 2i + i(2 - \sqrt{2} - 2i + i\sqrt{2}) + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$= -4iz + 2 - 2i + 2i - i\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$

$$= -4iz + 4 - i$$

نتيجة : عبارة SoS هي : $z' = -4iz + 4 - i$

7 - $|-4i| = 4$ إذن : SoS هو تشابه مباشر نسبته 4

و زاويته $\text{Arg}(-4i) = -\frac{\pi}{2}$ و مركزه w ذات اللاحقة

$$\frac{4-i}{1+4i} = \frac{(4-i)(1-4i)}{17}$$

$$= \frac{4-16i-i-4}{17}$$

$$= -i$$

إذن : المركز هو $w(0; -1)$
مقارنة :

التشابه S	التشابه SoS
المركز $w(0; -1)$	$w(0; -1)$
النسبة $k=2$	$k' = k \times k = 4$
الزاوية $\theta = -\frac{\pi}{4}$	$(\theta' = \theta) = -\frac{\pi}{2}$

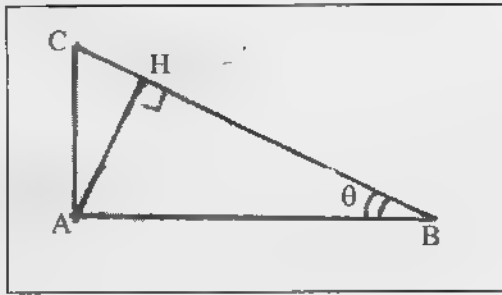
التمرين 12

ABC مثلث قائم في A حيث $(\vec{BC}; \vec{BA}) = \theta$

H هو المسقط العمودي للنقطة A على [BC]

ما هما نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه H ويحول A إلى B ؟

الحل - 12



لدينا $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ إذن : $\text{tg} \theta > 0$

في المثلث القائم HAB لدينا : $\text{tg} \theta = \frac{HA}{HB}$

منه : $HB \text{ tg} \theta = HA$

أي : $HB = \frac{1}{\text{tg} \theta} HA$ إذن : نسبة التشابه هي $\frac{1}{\text{tg} \theta}$

من جهة أخرى : $(\vec{HA}; \vec{HB}) = \frac{\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$

التمرين - 13

ABCD مربع حيث $(\vec{AD}; \vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$

عين نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و B إلى D

الحل - 13

ليكن S هذا التشابه حيث زاويته θ و نسبته k

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{BD}{AB} \\ \theta = (\vec{AB}; \vec{BD}) \end{array} \right\} \text{ إذن : } \begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = D \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{BD} \quad \text{منه} \quad (\vec{BA}; \vec{BD}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{BD} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{أي :}$$

$$k = \sqrt{2} \quad \text{منه :}$$

$$(\vec{AB}; \vec{BD}) = -3 \frac{\pi}{4} \quad \text{حسب الشكل فإن :}$$

نتيجة : S له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $-\frac{3\pi}{4}$

التمرين - 14

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B . K منتصف [AC] حيث $(\vec{BC}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$

عين في كل معادلي نسبة و زاوية التشابه المباشر S حيث :

1- المركز A و يحول B إلى K

2- المركز C و يحول K إلى B

3- المركز A و يحول B إلى C

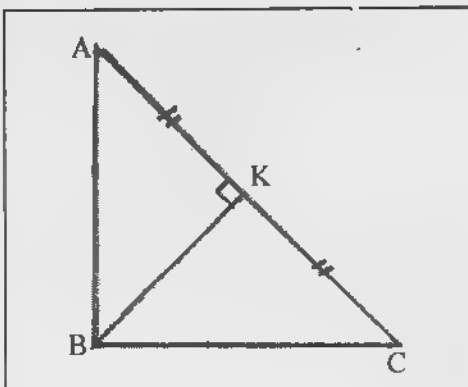
الحل - 14

من خواص المثلث المتساوي الساقين و القائم ما يلي :

$$AK = KC = BK \quad , \quad (\vec{CA}; \vec{CB}) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad (\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB} \quad \text{أي :}$$



$$\left. \begin{aligned} AK &= \frac{\sqrt{2}}{2} AB \\ CB &= \frac{CK}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned} \right\} \text{ منه : } \sqrt{2} CK$$

منه النتائج التالية :

$$\left. \begin{aligned} \text{إذن : التشابه المباشر ذو المركز } A \text{ و يحول } B \text{ إلى } K \text{ له النسبة } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و الزاوية } \frac{\pi}{4} \\ \overrightarrow{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AB} \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} -1$$

$$\left. \begin{aligned} \text{إذن : التشابه المباشر ذو المركز } C \text{ و يحول } K \text{ إلى } B \text{ له النسبة } \sqrt{2} \text{ و الزاوية } \frac{\pi}{4} \\ CB = \sqrt{2} CK \\ (\overrightarrow{CK}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} -2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(حسب فيثاغورث)} \\ \text{إذن : التشابه المباشر ذو المركز } A \text{ و يحول } B \\ \text{إلى } C \text{ له النسبة } \sqrt{2} \text{ و الزاوية } \frac{\pi}{4} \\ AC = \sqrt{2} AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} -3$$

التمرين - 15

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

A' و B' و C' هي منتصفات القطع [AB] ، [AC] ، [BC] على الترتيب
G هو مركز ثقل المثلث ABC

S₁ تشابه مباشر مركزه A و يحول B إلى A'

S₂ تشابه مباشر مركزه A' و يحول A إلى C

S₃ تشابه مباشر مركزه B و يحول C إلى G

S₄ تشابه مباشر مركزه G و يحول A إلى B'

عين نسب و زوايا كل من التشابهات S₁ ، S₂ ، S₃ ، S₄

الحل - 15

من خواص المثلث المتقايس الأضلاع أن الأعمدة هي متوسطات و هي منصفات للزوايا و نقطة تقاطعها هي إذن مركز الثقل للمثلث و هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث منه النتائج التالية :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{6} \quad -1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AA'}{AB} \quad \text{إذن : } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{AA'}{AB} \quad \text{منه :}$$

$$AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \quad \text{أي}$$

نتيجة : نسبة التشابه S₁ هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

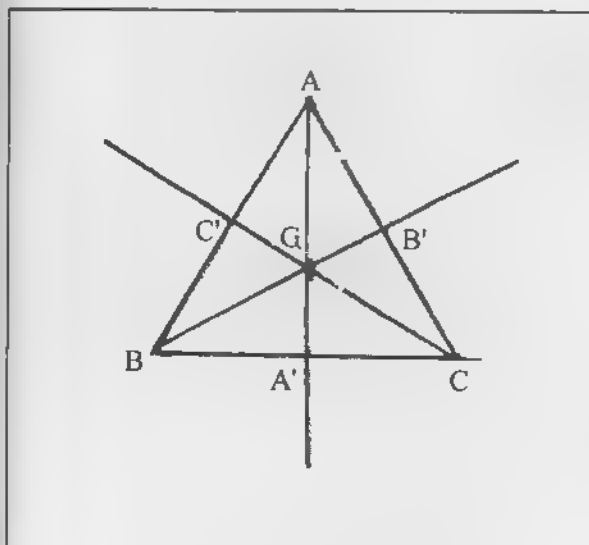
$$(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{A'C}) = -\frac{\pi}{2} \quad -2$$

$$\text{في المثلث } AA'C : \quad \text{أي}$$

$$A'C = AA' \times \text{tg } \frac{\pi}{6} \quad \text{منه :}$$

$$A'C = AA' \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{أي :}$$

$$A'C = \frac{\sqrt{3}}{3} AA' \quad \text{أي :}$$



نتيجة : نسبة التشابه S_2 هي $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$(\vec{BC}; \vec{BG}) = \frac{\pi}{6} - 3$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{BA'}{BG} \quad \text{في المثلث } BGA'$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{BG} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2 BG} \quad \text{أي :}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC}{BG} \quad \text{أي :}$$

$$BG = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} BC \quad \text{أي :}$$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} BG = \frac{\sqrt{3}}{3} BC \\ (\vec{EC}; \vec{BG}) = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\}$ إذن : التشابه S_3 له النسبة $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{6}$

$$(\vec{GA}; \vec{GB'}) = -\frac{\pi}{3} - 4$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{GB'}{GA} \quad \text{في المثلث } AGB'$$

$$\frac{1}{2} = \frac{GB'}{GA} \quad \text{أي :}$$

$$GB' = \frac{1}{2} GA \quad \text{منه :}$$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} GB' = \frac{1}{2} GA \\ (\vec{GA}; \vec{GB'}) = -\frac{\pi}{3} \end{array} \right\}$ إذن : نسبة التشابه S_4 هي $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

التمرين - 16

ABCD مربع ضلعه 1 و مركزه O حيث $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$

I هو منتصف القطعة [AO]

S تشابه مباشر يحول A إلى O و يحول B إلى I

1- عين نسبة و زاوية التشابه S

2- أعط كتابة مركبة للتشابه S باعتبار المعظم المتعامد و المتجانس المباشر $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$

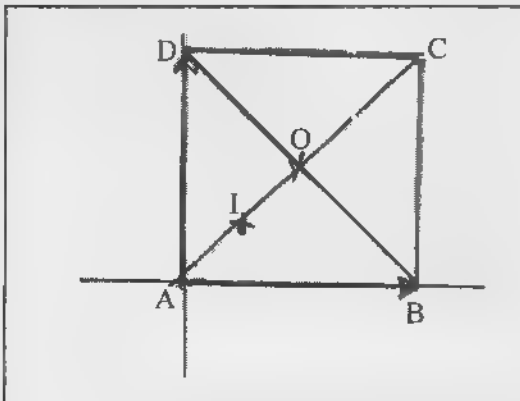
3- نسمي w مركز التشابه S. برهن أن المستقيمان (wA) و (wD) متعامدان

الحل - 16

$$\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases}$$

لتكن θ زاوية التشابه المباشر S و k نسبته

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{OI}{AB} \\ (\vec{AB}; \vec{OI}) = \theta \end{array} \right\} \text{ لدينا :}$$



من خواص المربع أن قطراه متساويان و متعامدان و منصفان للزوايا

$$\text{إذن : } (\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{4} \text{ منه } (\vec{AB}; \vec{AO}) = \frac{\pi}{4} \text{ و خاصة } (\vec{AB}; \vec{AI}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{منه : } (\vec{AB}; \vec{OI}) = -\frac{3\pi}{4} \text{ إذن : زاوية التشابه } S \text{ هي } -\frac{3\pi}{4}$$

من جهة أخرى : في المثلث AOB لدينا :

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{OA}{AB} = \frac{2OI}{AB} \quad \text{أي : } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2OI}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{OI}{AB} \quad \text{منه :}$$

$$\text{إذن : } k = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

نتيجة : نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و زاويته $-\frac{3\pi}{4}$

2 - باعتبار المعلم $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$ و طول ضلع المربع ABCD هو 1 فإن لواحق النقط A ، B ، C ، D

على الترتيب 0 ، 1 ، $1+i$ ، i منه لاحقة المركز O هي : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

و لاحقة النقطة I هي : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

لتكن $z' = \alpha z + \beta$ = بارة التشابه S

$$\begin{cases} \alpha(0) + \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \dots\dots\dots (1) \\ \alpha(1) + \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases}$$

$$\text{من (1) : } \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{بالتعويض في (2) : } \alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = (-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$$\text{تحقيق : } \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \right| = \frac{1}{4} \quad | -i | = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{إذن : نسبة التشابه } S \text{ هي } \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{إذن : زاوية التشابه } S \text{ هي } -\frac{3\pi}{4} \quad \text{Arg}(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i) = -\frac{3\pi}{4}$$

3 - لنبحث عن مركز التشابه S :

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i} = \frac{\frac{1}{2}(1+i)}{\frac{1}{4}(5+i)}$$

$$= \frac{2(1+i)}{5+i} \times \frac{5-i}{5-i}$$

$$= \frac{2(5-i+5i+1)}{25+1}$$

$$= \frac{12+8i}{26}$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{4}{13}i$$

منه : مركز التشابه S هو النقطة $w(\frac{6}{13}; \frac{4}{13})$

$$\vec{wD} \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix} \text{ أي } \vec{wD} \begin{pmatrix} 0 - \frac{6}{13} \\ 1 - \frac{4}{13} \end{pmatrix} ; \quad \vec{Aw} \begin{pmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix} = 3$$

$$\vec{Aw} \cdot \vec{wD} = \frac{6}{13} \left(\frac{-6}{13} \right) + \frac{4}{13} \left(\frac{9}{13} \right) \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{-36}{169} + \frac{36}{169}$$

$$\vec{Aw} \perp \vec{wD} : \text{إذن } = 0$$

منه : المستقيمان (wD) و (wA) متعامدان

التمرين - 17

أختر الجواب الصحيح في كل سؤال ممايلي :

1 - التحويل الذي عبارته المركبة $z' = 2iz - 3$ هو :

(أ) تناظر مركزه $w(-3; 2)$

(ب) تناظر محوري محوره المنصف الأول

(ج) تشابه مباشر مركزه $w(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5})$

(د) تشابه مباشر مركزه $w(-3; 2)$

2 - التعريف المركب للتشابه ذو النسبة $\sqrt{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$ و المركز $w(1; \sqrt{3})$ هو :

$$z' = \sqrt{3}z + 4 \quad (\text{أ}) \quad \text{جـ} \quad z' = i\sqrt{3}z + 1 + i\sqrt{3}$$

$$z' = i\sqrt{3}z + 4 \quad (\text{ب}) \quad \text{د} \quad z' = i\sqrt{3}z + 4$$

الحل - 17

$$1 - z' = 2iz - 3 \text{ من الشكل } z' = \alpha z + \beta$$

لدينا : $|2i| = 2$ إذن : التحويل تشابه مباشر نسبته 2

$$\text{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2} \text{ إذن : زاوية التشابه هي } \frac{\pi}{2}$$

$$w(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}) \text{ إذن : مركز التشابه هو } \frac{-3}{1-2i} = \frac{-3(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو جـ (تشابه مباشر مركزه $w(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5})$)

2 - التشابه المباشر ذو المركز $w(1; \sqrt{3})$ و النسبة $\sqrt{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$ له

$$\text{التعريف المركب التالي : } z' = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) z + \beta$$

$$\frac{\beta}{1-i\sqrt{3}} = 1+i\sqrt{3} \text{ حيث } z' = i\sqrt{3}z + \beta \text{ أي :}$$

$$\beta = (1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = 4 \quad \text{منه :}$$

$$z' = i\sqrt{3}z + 4 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو : ب) $z' = i\sqrt{3}z + 4$

التمرين - 18

A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب a و b

يكون المثلث MAB قائم و متساوي الساقين و مباشر رأسه M إذا وفقط إذا كانت للنقطة M لاحقة z تحقق :

$$\begin{aligned} z - a &= e^{i\frac{\pi}{2}}(b - a) & \text{(ج)} & \quad z = \frac{b - ia}{1 - i} & \text{(د)} \\ b - z &= \frac{\pi}{2}(a - z) & \text{(ب)} & \quad a - z = i(b - z) & \text{(ب)} \end{aligned}$$

الحل - 18

يكون المثلث MAB قائم و متساوي الساقين و مباشر رأسه M إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} \text{Arg}(b - z) - \text{Arg}(a - z) = \frac{\pi}{2} \\ |b - z| = |a - z| \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \\ MB = MA \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{b - z}{a - z}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{b - z}{a - z}\right| = 1 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{b - z}{a - z} = 1 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{منه :}$$

$$\frac{b - z}{a - z} = i \quad \text{أي :}$$

$$b - z = i(a - z) \quad \text{أي :}$$

$$b - z = ia - iz \quad \text{منه :}$$

$$b - ia = z - iz \quad \text{أي :}$$

$$b - ia = z(1 - i) \quad \text{أي :}$$

$$z = \frac{b - ia}{1 - i} \quad \text{أي :}$$

$$z = \frac{b - ia}{1 - i} \quad \text{(نتيجة : الجواب الصحيح هو : أ)}$$

التمرين - 19

A و B نقطتان متميزتان . I منتصف [AB]

f تشابه مباشر مركزه A ، نسبته 2 و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

g تشابه مباشر مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ليكن h التناظر المركزي ذو المركز I

اختر الجواب الصحيح مما يلي :

(أ) hogof دوران يحول A إلى B

(ب) hogof تناظر بالنسبة إلى محور القطعة [AB]

(ج) hogof ليس تشابهاً مباشراً

(د) hogof انسحاب شعاعه \overrightarrow{AB}

الحل - 19

من خواص التشابهات أن مركب تشابهين ذات نفس المركز هو تشابه ذات المركز نفسه و النسبة جداء النسبتين و زاويته هو مجموع الزاويتين

و عليه التحويل gof هو تشابه مباشر مركزه A و نسبته $2 \times \frac{1}{2} = 1$ و زاويته $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

إذن : gof هو تناظر مركزي بالنسبة إلى النقطة A

نتيجة : hogof هو مركب تناظر مركزي بالنسبة إلى A و تناظر مركزي بالنسبة إلى I

إذن : hogof هو انسحاب شعاعه \overrightarrow{AB}

الجواب الصحيح هو (د) hogof هو انسحاب شعاعه \overrightarrow{AB}

التمرين - 20

فيما يلي ميز بين الجمل الصحيحة و الجمل الخاطئة

1 - الكتابة المركبة $z' = 2iz$ تعرف تشابه مباشر نسبته 4

- 2 - الكتابة المركبة $z' = 3z + 4$ تعرف تحاك نسبة 3
 3 - الكتابة المركبة $z' = (1 + i)z$ تعرف تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{4}$
 4 - الكتابة المركبة $z' = -3iz + 3i$ تعرف تشابه مباشر زاويته $3\frac{\pi}{2}$

الحل - 20

- 1 - خاطئ: نسبة التشابه هي 2
 2 - صحيح .
 3 - صحيح .
 4 - صحيح .

التمرين - 21

ميز بين الجمل الصحيحة و الخاطئة في ما يلي :

- 1 - التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو تشابه مباشر
 2 - الدوران في المستوي هو تشابه مباشر نسبته 1
 3 - التحاكي في المستوي هو تشابه مباشر له نفس المركز و نفس النسبة
 4 - التناظر المركزي في المستوي هو تشابه مباشر زاويته π و له نفس المركز
 5 - مبدأ المعلم هو مركز لكن تشابه مباشر معرف بـ $z' = (a + bi)z$ حيث a و b عددين مركبين

الحل - 21

1 - خاطئ : التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو مركب تشابه مباشر و تناظر محوري بالنسبة إلى محور الفواصل إذن فهو تشابه غير مباشر

- 2 - صحيح
 3 - خاطئ لأن نسبة التحاكي قد تكون عدد حقيقي سالب .
 4 - صحيح

5 - صحيح من أجل $a + bi \neq 0$ و $a + bi \neq 1$

تمرين - 22

نقطة ذات اللاحقة 2 . S تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4} \right) z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ما قولك عن العبارات التالية :

- 1 - التحويل S هو تشابه مباشر للمستوي
 2 - التحويل S له نقطة صاعدة وحيدة هي $w(2; 0)$
 3 - المثلث wMM' قائم في M'

4 - $k \in \mathbb{Z}$ حيث $(\overrightarrow{wM'}; \overrightarrow{v/M}) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

5 - R دوران ذات المركز O و الزاوية $-\frac{\pi}{6}$. التحويل SoR هو تحاكي .

الحل - 22

تعبارة المركبة للتحويل S من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ إذن : S هو تشابه مباشر للمستوي وعناصره كمايلي :

$$\left| \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad |\sqrt{3} + i| = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{النسبة :}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right) = \text{Arg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{6} \quad \text{الزاوية :}$$

$$\frac{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})}{\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})} = 2 \quad \text{المركز :}$$

نتائج :

(أ) S تشابه مباشر للمستوي مركزه $w(2; 0)$ ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$

(ب) إذا كانت $M' - S(M)$ فإن : $\left. \begin{array}{l} (wM'; wM) = -\frac{\pi}{6} \\ (wM; wM') = \frac{\pi}{6} \\ wM' = \frac{\sqrt{3}}{2} wM \end{array} \right\}$ منه

إذن : $\frac{wM'}{wM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نكر $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : المثلث wMM' قائم لزاوية وتره $[wM]$ إذن : قائم في M'

(ج) إذا كان R دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ فإن شكله المركب :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) z \quad \text{أي} \quad z' = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] z$$

$$z \xrightarrow{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) z \xrightarrow{S} z' = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4} \right) \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) z \right] + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} (3 + 1) z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{2} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن : التحويل } SoR \text{ له الشكل المركب}$$

منه : SoR هو تحاكي للمستوي نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$

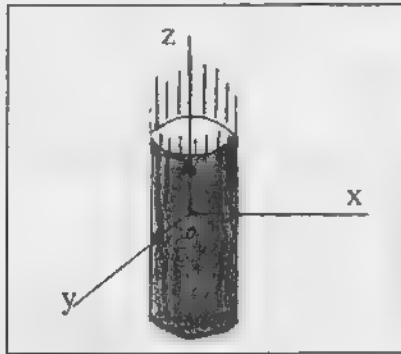
و بناء على هذه النتائج فإن كل من العبارات المقترحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 صحيحة .

المقاطع المستوية للسطوح

في كل درس نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1 - السطح الأسطواني الدوراني

تعريف : (C) دائرة مركزها O و نصف قطرها R حيث $R > 0$ من المستوي (xoy) اسمي سطح أسطواني دوراني محوره (OZ) و نصف قطره R مجموعة المستقيمت الموازية للمحور (OZ) و التي تشمل نقطة من الدائرة (C) كل مستقيم من هذه المستقيمت يسمى مولدا لهذا السطح .



معادلة السطح الأسطواني الدوراني

السطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ و تسمى هذه العلاقة معادلة ديكارتية للسطح الأسطواني الدوراني .}$$

ملاحظة : في المعادلة $x^2 + y^2 = R^2$ لا يظهر الرافق z فإذن $z \in \mathbb{R}$ منه السطح الدوراني الأسطواني غير محدود .

مقطع مستوي يوازي (xoy) بسطح أسطواني دوراني محوره (OZ)

ليكن (P) مستوي يوازي (xoy) معادلته $z = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$

مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R هو الدائرة (C) من المستوي (P) و التي مركزها $w(0; 0; a)$ و نصف قطرها R .

مقطع مستوي يوازي (xoz) بسطح أسطواني دوراني محوره (OZ)

ليكن (P) مستوي يوازي (xoz) معادلته $y = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$

ليكن Σ مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R . نميز الحالات التالية :

$$1 - |a| > R : \Sigma \text{ مجموعة خالية (لا يوجد تقاطع)}$$

$$2 - |a| = R : \Sigma \text{ هو المستقيم ذو المعادلة } y = a \text{ موازي لـ (OZ)}$$

$$3 - |a| < R : \Sigma \text{ هو اتحاد مستقيمين معرفين بالتمثيلين الوسيطيين :}$$

$$\begin{cases} y = a \\ x = \sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} y = a \\ x = -\sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

مقطع مستوي يوازي (yoz) بالسطح الأسطواني الدوراني ذو المحور (OZ)

ليكن (P) مستوي يوازي (yoz) معادلته $x = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$

ليكن Σ مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (OZ) و نصف قطره R . نميز الحالات التالية :

$$1 - |a| > R : \Sigma \text{ مجموعة خالية (لا يوجد تقاطع)}$$

$$2 - |a| = R : \Sigma \text{ هو المستقيم ذو المعادلة } x = a \text{ موازي لـ (OZ)}$$

$$3 - |a| < R : \Sigma \text{ هو اتحاد مستقيمين معرفين بالتمثيلين الوسيطيين :}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = a \\ y = -\sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

نشاط :

ليكن (S) السطح الأسطواني الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$

1 - (a) عين تقاطع السطح (S) مع المستويات التي معادلاتها $x = 7$; $x = -5$; $x = 4$

(b) مثل بالإشياء السطح (S) و المستويات السابقة .

2- ليكن (P) المستوى ذو المعادلة $x = k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

ناقش حسب قيم k تقاطع السطح (S) و المستوى (P)

3- ليكن $k \in [-5; 5]$. نعتبر المستقيمت (D_k) ذات التمثيل الوسيط التالي :

$$\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases} \text{ والمستقيمت (T}_k\text{) ذات التمثيل الوسيط } \begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases}$$

(a) تحقق أن (D_k) و (T_k) محتويان في السطح (S)

(b) بين أن السطح (S) هو اتحاد المستقيمت (D_k) و (T_k) لما k يمسح المجال $[-5; 5]$

الحل :

1- لنكن $M(x; y; z)$ نقطة مشتركة بين السطح (S) و المستوى (P₁) ذو المعادلة $x = 4$

$$\begin{cases} x = 4 \\ 16 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y \in \{-3; 3\} \end{cases} \text{ يكافئ}$$

إذن : تقاطع (S) و (P₁) هو المستقيمت اللذين تمثلهما الوسيطيين :

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

لنكن $M(x; y; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المستوى (P₂) ذو المعادلة $x = -5$

$$\begin{cases} x = -5 \\ 25 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = -5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

منه : تقاطع (S) و المستوى (P₂) ذو المعادلة $x = -5$ هو المستقيم ذو التمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

لنكن $M(x; y; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المستوى (P₃) ذو المعادلة $x = 7$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 49 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y^2 = -24 \end{cases} \text{ يكافئ مستحيل}$$

إذن : السطح (S) لا يقطع المستوى ذو المعادلة $x = 7$

$$\begin{cases} x = k \\ k^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = k \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} x = k \\ y^2 = 25 - k^2 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$
$25 - k^2$	-	0	+	-

الحالة (1) $k \in \{-5; 5\}$ الجملة تكافئ $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$

إذن : (S) و (P) يتقاطعان في مستقيم تمثله الوسيط $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$

الحالة (2) $k \in]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$ الجملة لا تقبل حلول

إذن : (S) و (P) لا يتقاطعان .

$$\begin{cases} x = k \\ y = \pm \sqrt{25 - k^2} \end{cases} \quad \text{الحالة (3) } k \in]-5; 5[\text{ الجملة تكافئ}$$

إذن : المستوي (P) و (S) يتقاطعان في مستقيمين تمثيلاهما الوسيطيين

$$\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases} \quad \text{إذن : } (D_k) \text{ نقطة } M(x; y; z) \text{ لتكون (a - 3)}$$

$$x^2 + y^2 = 25 - k^2 + k^2 \quad \text{منه :}$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{أي : } M \in (S) \quad \text{إذن : } (D_k) \subset (S)$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases} \quad \text{إذن : } (T_k) \text{ نقطة } N(x; y; z) \text{ لتكون}$$

$$x^2 + y^2 = 25 - k^2 + k^2 \quad \text{منه :}$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{أي : } N \in (S) \quad \text{إذن : } (T_k) \subset (S)$$

نتيجة : كل من (D_k) و (T_k) محتويان في (S)

$$(b) \text{ لتكون } M(x; y; z) \text{ نقطة من (P) إذن : } x^2 + y^2 = 25$$

$$\begin{cases} x = k \\ k^2 + y^2 = 25 \\ -5 \leq k \leq 5 \end{cases} \quad \text{منه}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y^2 = 25 - k^2 \\ -5 \leq k \leq 5 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = \pm \sqrt{25 - k^2} \\ -5 \leq k \leq 5 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$M \in (\Gamma_k) \cup (T_k) \quad \text{أي}$$

$$(S) \subset ((D_k) \cup (T_k)) \quad \text{منه :}$$

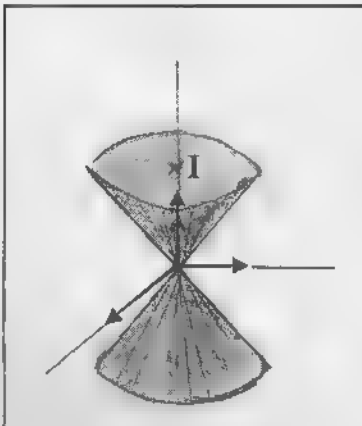
$$((D_k) \cup (T_k)) \subset (S) \quad \text{و} \quad (S) \subset ((D_k) \cup (T_k)) \quad \text{نتيجة :}$$

$$(S) = (T_k) \cup (D_k) \quad \text{إذن : وهو المطلوب}$$

2 - سطح مخروط دوراني

تعريف :

I نقطة من المحور (Oz) . دائرة (C) من مستوي موازي للمستوي $(x \circ y)$ مركزها I مجموعة المستقيمت التي تمر من النقطة o و تشمل نقطة من الدائرة (C) تسمى سطح المخروط الدوراني ذو القاعدة (C) و الرأس o كل مستقيم من هذه المستقيمت هو مولدا لهذا السطح المخروطي الدوراني
الانشاء :



معادلة سطح المخروط الدوراني

سطح المخروط الدوراني الذي محوره (Oz) وقاعدته الدائرة (C) ذات المركز $I(0; 0; a)$ و نصف القطر R و الذي

$$\text{رأسه } o \text{ هو مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء حيث } x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{a}\right)^2 z^2$$

ملاحظة : العكس صحيح حيث مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ حيث $k \neq 0$ هي سطح مخروط دوراني رأسه o وقاعدته الدائرة (C) ذات المركز $I(0; 0; 1)$ و نصف القطر $|k|$ التي تقع على السطح $z = 1$ (بوضع $a = 1$ فإن $R = k$)

مقطع سطح مخروط دوراني بمستوي يوازي $(x \circ y)$

ليكن (P) مستوي يوازي $(x \circ y)$ معادلته $z = t$ حيث $t \in \mathbb{R}$

مقطع المستوي (P) بسطح المخروط الدوراني الذي رأسه o ومحوره (Oz) هو :

(a) النقطة $0(0; 0; 0)$ إذا كان $t = 0$ (b) دائرة ذات المركز $I(0; 0; t)$ من المستوي (P) إذا كان $t \neq 0$

نشاط :

ليكن (C) السطح المخروطي الدوراني ذو المعادلة $x^2 + y^2 = 9z^2$ 1 - بين أن تقاطع (C) مع المستوي (P) ذو المعادلة $z = 2$ هو دائرة يطلب معادلتها في المستوي (p) و مركزها .2 - لتكن A نقطة ذات الإحداثيات $(3; 0; 0)$ و (Q) المستوي ذو المعادلة $x = 3$. أكتب في المعظم $(A; J; K)$

للمستوي (Q) معادلة تقاطع (C) مع (Q)

3 - مثل بيانيا هذا التقاطع في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

الحل :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9z^2 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ z = 2 \end{cases}$$

و هي معادلة دائرة مركزها $I(0; 0; 2)$ في المستوي ذو المعادلة $z = 2$ و نصف قطرها $\sqrt{36} = 6$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 9 + y^2 = 9z^2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + y^2 = 9z^2 \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ z^2 = \frac{9 + y^2}{9} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ z = \pm \frac{\sqrt{9 + y^2}}{3} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : تقاطع المستوي (Q) و (C) هو اتحاد المنحنيين ذو المعادلتين

$$(Q) \quad z = \frac{-\sqrt{9 + y^2}}{3} \quad , \quad z = \frac{\sqrt{9 + y^2}}{3}$$

الإنشاء : بدراسة تغيرات الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$ كما يلي :

$$D_f = \mathbb{R}$$

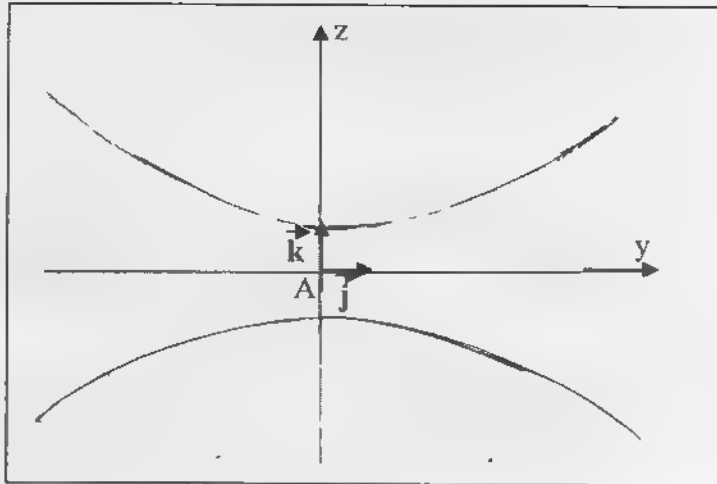
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x}{3\sqrt{9 + x^2}} \quad \text{من إشارة } x$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

ملاحظة : برسم منحنى الدالة f يمكن استنتاج منحنى الدالة g حيث $g(x) = \frac{-\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل (oy) كما يلي :



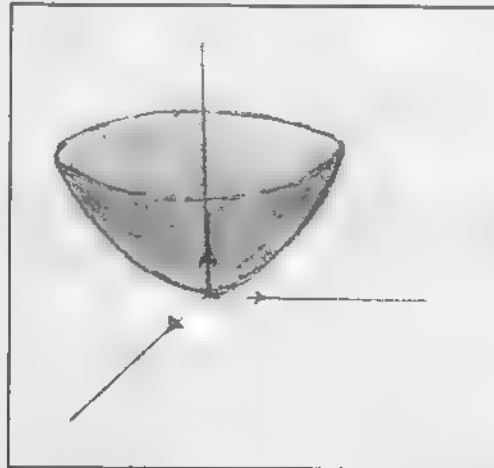
3 - المجسم المكافئ

تعريف (1)

f دالة عددية لمتغيرين في معلم للفضاء . التمثيل البياني لمجموعة النقاط M ذات الاحداثيات $(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $z = f(x ; y)$ يسمى المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

تعريف (2)

في الفضاء المنسوب إلى معلم ، المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ تسمى مجسم مكافئ محوره (Oz) الإنشاء :



نتائج : لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ (مجسم مكافئ)

(1) مقطع المساحة (S) بالمستوي ذو المعادلة $x = a$ أو $y = a$ هو قطع مكافئ محوره يوازي (Oz)

(2) مقطع المساحة (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = a$ هو دائرة مركزها النقطة $I(0 ; 0 ; a)$

4 - المجسم الزائدي

تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم ، المساحة (S) التي معادلتها $z = xy$ تسمى مجسم زائدي

نتائج : ليكن (S) مجسم زائدي معادلته $z = xy$

(1) مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $x = a$ أو $y = a$ هو مستقيم

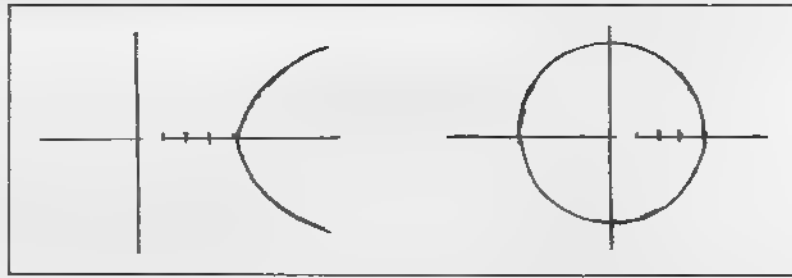
(2) مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = a$ هو إما قطع زائد أو اتحاد المستقيمين (Ox) و (Oy)

نشاط :

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$

(P) و (Q) مستويان كل منهما يوازي (xoy) أو (xoz) أو (yoz)

تقاطع (P) و (Q) مع (S) ممثل في الشكلين التاليين :



(S) تقاطع (Q)

(S) تقاطع (P)

أكتب المعادلة الممكنة لكل من المستويين (P) و (Q)
الحل :

(a) المستوي (P)

حسب الشكل فإن $(S) \cap (P)$ هو دائرة نصف قطرها 4 إذن : (P) له المعادلة $z = k$ حيث $x^2 + y^2 = (4)^2$ أي $x^2 + y^2 = 16$

لكن (S) له المعادلة $x^2 + y^2 = z$ منه $z = 16$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي $z = 16$ (يوازي $(x \circ y)$)

(b) المستوي (Q)

حسب الشكل فإن $(Q) \cap (S)$ هو قطع مكافئ إذن معادلة المستوي (Q) هي إما $y = k$ أو $x = k$

من أجل $y = k$ نحصل على : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = k \end{cases}$

منه : $\begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases}$

أي : $\begin{cases} k = \pm \sqrt{z - x^2} \\ y = k \end{cases}$

حسب الشكل فإن ذروة القطع المكافئ تحقق $z = 4$ منه $k = \pm 2$

من أجل $x = k$ نحصل على : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$

أي : $\begin{cases} z = k^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$

أي : $\begin{cases} k = \pm \sqrt{z - y^2} \\ x = k \end{cases}$

حسب الشكل فإن ذروة القطع المكافئ تحقق $z = 4$ منه $k = \pm 2$

نتيجة : المعادلات الممكنة للمستوي (Q) هي :

$$y = -2 ; y = 2 ; x = -2 ; x = 2$$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين ننسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

التمرين 1

1 - أكتب معادلة لسطح الأسطوانة التي محورها (Oz) و الذي يشمل النقطة $A(3; -2; 5)$

2 - هل هذا السطح يشمل النقطة $B(1; 2\sqrt{3}; -1)$

3 - هل هذا السطح يشمل النقطة $C(-\sqrt{7}; 2; 0)$

4 - هل هذا السطح يشمل النقطة $D(\sqrt{5}; 2\sqrt{2}; \sqrt{5})$

الحل 1

1 - السطح الأسطواني محوره (Oz) إذن معادلته من الشكل $x^2 + y^2 = k^2$ حيث k هو نصف قطر قاعدته

بما أن النقطة $A(3; -2; 5)$ تنتمي إلى السطح فإن : $(3)^2 + (-2)^2 = k^2$
أي : $k^2 = 13$

نتيجة : معادلة السطح الأسطواني المطلوبة هي : $x^2 + y^2 = 13$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

2 - $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 13$ منه : النقطة $B(1; 2\sqrt{3}; -1)$ تنتمي إلى السطح .

3 - $\begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = 2 \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 7 + 4 = 11$ إذن : النقطة $C(-\sqrt{7}; 2; 0)$ لا تنتمي إلى السطح .

4 - $\begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 5 + 8 = 13$ منه : النقطة $D(\sqrt{5}; 2\sqrt{2}; \sqrt{5})$ تنتمي إلى السطح .

التمرين 2

كتب معادلة السطح الأسطواني الذي محوره (Oz) و يشمل المستقيم (Δ) الذي معادلته $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

الحل 2

السطح الأسطواني محوره (Oz) إذن : معادلته $\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

بما أن السطح يشمل نقط المستقيم ذو المعادلة $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ فإن كل النقط ذات الإحداثيات $(-4; 3; z)$ تحقق معادلة السطح الأسطواني .

إذن : $(-4)^2 + (3)^2 = k^2$

أي : $k^2 = 25$

نتيجة : معادلة السطح الأسطواني هي $x^2 + y^2 = 25$

التمرين 3

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء حيث $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

1 - بين أن النقط M تقع على سطح أسطواني (C) محوره (Oz) و نصف قطر قاعدته 1

2 - هل مجموعة النقط $M(x; y; z)$ لما يسمح t مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} هي السطح الأسطواني (C) ؟

الحل 3

1 - معادلة السطح الأسطواني (C) الذي محوره (Oz) و نصف قطر قاعدته 1 نكتب من الشكل : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\text{من أجل } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \text{ فإن : } x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

إذن : $M \in (C)$ لنكن $N(x; y; z)$ نقطة من السطح (C)

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x^2 \leq 1 \\ -1 \leq y^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{اي :}$$

إذن : يوجد على الأقل $t \in \mathbb{R}$ حيث $\begin{cases} \cos t = x \text{ أو } \sin t = x \\ \cos t = y \text{ أو } \sin t = y \end{cases}$

منه لما t يتغير في \mathbb{R} فإن x و y يتغيران على المجال $[-1; 1]$

إذن : (C) جزء من مجموعة النقط M

نتيجة : لما t يمسح \mathbb{R} فإن مجموعة النقط M هي السطح الأسطوانى (C)

التمرين 4

(C) هو السطح الأسطوانى الذي محوره (oz) و يشمل النقطة $A(1; 2; 3)$

1 - عين معادلة السطح (C)

2 - ميز مقاطع السطح (C) بالمستويات التي معادلاتها :

$$(a) \quad x = 2 \quad (b) \quad y = -3 \quad (c) \quad z = -4$$

الحل 4

1 - السطح الأسطوانى (C) محوره (oz) إذن معادلته $x^2 + y^2 = k^2$

$$A \in (C) \quad \text{إذن : } (1)^2 + (2)^2 = k^2$$

$$k^2 = 5 \quad \text{منه :}$$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي : $x^2 + y^2 = 5$

$a - 2$ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x = 2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 4 + y^2 = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : تقاطع (C) و المستوي (P) هو اتحاد المستقيمين ذو التمثيلين الوسيطيين :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

(b) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $y = -3$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 9 + y^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{مستحيل}$$

نتيجة : السطح (C) لا يقطع المستوي (Q) ذو المعادلة $y = -3$

(c) ليكن (R) المستوي ذو المعادلة $z = -4$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = -4 \end{cases} \quad \text{إذن : تقاطع السطح (C) و المستوي (R) هي الدائرة التي مركزها } (0; 0; -4)$$

و نصف قطرها $\sqrt{5}$ من المستوي (R) ذو المعادلة $z = -4$

التمرين 5

(C) هو السطح المخروطى الدوراني الذي رأسه 0 و محوره (oz) و الذي يشمل النقطة $A(1; 2; 3)$

1 - عين معادلة للسطح (C)

2 - ميز مقاطع السطح (C) بالمستويات التي معادلاتها :

$$(a) \quad z = 1 \quad (b) \quad z = -2 \quad (c) \quad x = y$$

الحل - 5

1 - (C) سطح مخروط دوراني محوره (OZ) و رأسه O إنز له المعادلة $x^2 + y^2 = k^2 z^2$

$A \in (C)$ إنز : $(1)^2 + (2)^2 = k^2 (3)^2$

أي $9k^2 = 5$ منه $k^2 = 5/9$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي : $x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2$

2 - (a) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} \\ z = 1 \end{cases}$$

إنز : $(C) \cap (P)$ هي الدائرة التي مركزها $(0; 0; 1)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{3}$ من المستوي (P)
(b) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $z = -2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{20}{9} \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{20}{9} \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

إنز : $(C) \cap (Q)$ هي الدائرة التي مركزها $(0; 0; -2)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{20}}{3}$ من المستوي (Q)

(c) ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $x = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + x^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{5}{18} z^2 \\ x = y \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x = \pm z \sqrt{\frac{5}{18}} \\ x = y \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x = -z \sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -z \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = z \sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = z \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : $(C) \cap (\pi)$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثلهما الوسيطين كمايلي :

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = -t \sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -t \sqrt{\frac{5}{18}} \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t \sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = t \sqrt{\frac{5}{18}} \\ z = t \end{cases}$$

تمرين - 6

(D) هو المستقيم الذي يمر بالمبدأ O و شعاع توجيهه $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$ حيث :

ليكن (C) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (OZ) و يحوي المستقيم (D)

1 - عين معادلة السطح (C)

2 - عين العدد الحقيقي الموجب a حتى يكون مقطع (C) بالمستوي الذي معادلته $z = a$ هو دائرة (Γ) نصف

قطرها 2 حيث يطلب احداثيات مركزها .

الحل - 6
 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ إذن $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$

فيه التمثيل الوسيطى للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

(C) سطح مخروطي دوراني محوره (oz) إذن له المعادلة : $x^2 + y^2 = k^2 z^2$

بما أن (D) محتوى في (C) فإن : $(2t)^2 + (0)^2 = k^2(-t)^2$

أي : $4t^2 = k^2 t^2$

إذن : $k^2 = 4$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي $x^2 + y^2 = 4z^2$

2- ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $z = a$ حيث $a > 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ z = a \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \\ z = a \end{cases}$

إذن : $(\pi) \cap (C)$ هو الدائرة التي مركزها $(0; 0; a)$ و نصف قطرها $2|a|$ من المستوي (π)

نتيجة : يكون $(\pi) \cap (C)$ دائرة نصف قطرها 2 اذا و فقط إذا كان $2|a| = 2$ أي $2a = 2$ لأن $a > 0$ منه : $a = 1$

إذن : (Γ) مركزها $I(0; 0; 1)$ من أجل $a = 1$

التمرين - 7

(P) و (Q) مستويان معادلاتهما على الترتيب $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ و $2x - z = 0$

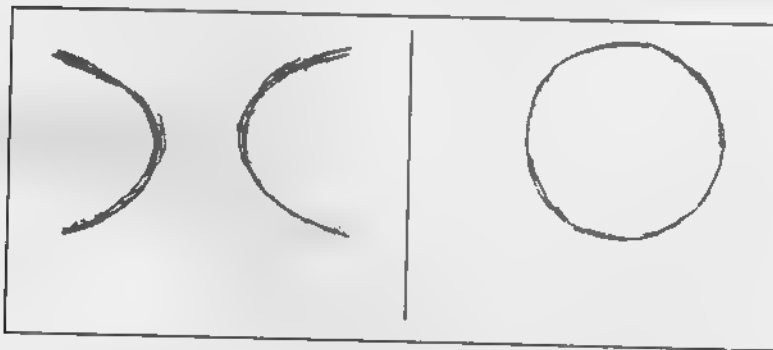
1- أثبت أن (P) و (Q) ليسا متوازيان .

2- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (P) و (Q)

3- ليكن (H) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (ox) و يشمل المستقيم (D) كمولد

بين أن معادلة (H) هي : $y^2 + z^2 = 7x^2$

4- إليك الشكلين التاليين الممثلين لتقاطع (H) مع مستويات موازية لمحاور الاحداثيات .



الشكل (2)

الشكل (1)

عين في كل حالة من الحالتين معادلة للمستويات الممكنة :

5- بين أن المعادلة $x^2 \equiv 3[7]$ ذات المجهول الصحيح x لا تقبل حولا في \mathbb{Z}

6- بين صحة الخاصية التالية : لكل عددين صحيحين a و b فإن إذا كان $a^2 + b^2$ يقسم 7

فإن 7 يقسم a و 7 يقسم b

7- a ، b ، c أعداد صحيحة غير معدومة .

بين أنه إذا كانت $A(a; b; c)$ نقطة من (H) فإن الأعداد a ، b ، c مضاعفات العدد 7

الحل - 7

1- شعاع ناظمي للمستوي (P) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ شعاع باطني للمستوي (Q)}$$

إذن : \vec{u} و \vec{v} ليسا متوازيان .
منه المستويان (P) و (Q) ليسا متوازيان

$$\begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2(2x) = 0 \\ z = 2x \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} y\sqrt{3} = 3x \\ z = 2x \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ z = 2x \end{cases} \text{ يكافئ}$$

نتيجة : المستقيم (D) له التمثيل الوسيطى التالي :
حيث $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t \end{cases}$

3 - (H) سطح المخروط الدوراني ذو المحور (ox) إذن (H) له المعادلة $y^2 + z^2 = k^2 x^2$ حيث $k \in \mathbb{R}$
(D) مولد للسطح (H) إذن : كل نقطة من (D) تحقق معادلة (H)

$$(x\sqrt{3})^2 + (2x)^2 = k^2 x^2 \quad \text{منه :}$$

$$7x^2 = k^2 x^2 \quad \text{أي :}$$

$$k^2 = 7 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : معادلة (H) هي : $y^2 + z^2 = 7x^2$

4 - الشكل (1) : تقاطع (H) مع المستوي هو دائرة إذن : المستوي موازي لـ $(y \circ z)$ و معادلته من الشكل $x = k$ حيث $k \neq 0$

الشكل (2) : تقاطع (H) مع المستوي هو قطع زائد إذن المستوي موازي لأحد المستويين $(x \circ y)$ أو $(x \circ z)$ و معادلته إما $y = k$ أو $z = k$ حيث $k \neq 0$

-5

$x \equiv ?[7]$	0	1	-2	3	4	5	6
$x^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^2 \not\equiv 3[7]$

إذن : المعادلة $x^2 \equiv 3[7]$ لا تقبل حولا في \mathbb{Z}

6 - ليكن a و b عددين صحيحين .

حسب السؤال 5 فإن :

$$a^2 \equiv 0[7] \text{ أو } a^2 \equiv 1[7] \text{ أو } a^2 \equiv 2[7] \text{ أو } a^2 \equiv 4[7]$$

$$\text{و } b^2 \equiv 0[7] \text{ أو } b^2 \equiv 1[7] \text{ أو } b^2 \equiv 2[7] \text{ أو } b^2 \equiv 4[7]$$

منه الحالات الممكنة التالية :

$b^2 \equiv ?[7]$	0	1	2	4
$a^2 \equiv ?[7]$				
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

نتيجة : يكون $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $a^2 \equiv 0[7]$ و $b^2 \equiv 0[7]$

و حسب السؤال (5) فإن $a^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $a \equiv 0[7]$ و $b^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $b \equiv 0[7]$

$$\text{إذن : } \begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases} \text{ يكافئ } a^2 + b^2 \equiv 0[7]$$

7 - A نقطة من (H) إذن، احداثياتها تحقق المعادلة $y^2 + z^2 = 7x^2$

أي : $b^2 + c^2 = 7a^2$

منه : $b^2 + c^2 \equiv 0[7]$

إذن : $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ c \equiv 0[7] \end{cases}$ حسب السؤال (6)

أي $\begin{cases} b = 7n \\ c = 7m \end{cases}$ حيث m و n أعداد صحيحة

بالتعويض في معادلة (H) نحصل على : $(7n)^2 + (7m)^2 = 7a^2$

أي : $7n^2 + 7m^2 = a^2$

أي : $7(n^2 + m^2) = a^2$

إذن : a^2 يقسم 7

منه : $a \equiv 0[7]$ حسب السؤال 5

أي $a = 7q$

نتيجة : إذا كانت $A(a; b; c)$ نقطة من (H) فإن : $a \equiv 0[7]$ و $b \equiv 0[7]$ و $c \equiv 0[7]$

التمرين 8

لتكن النقط $A(0; 5; 5)$ و $B(0; 0; 10)$

نسمي (π) المستوي الذي معادلته $x = 0$ و لتكن (C) دائرة من (π) مركزها B و تشمل A

1 - بين أن المستقيم (OA) مماس للدائرة (C)

نسمي (S) الكرة الناتجة عن دوران (C) حول المحور (oz)

نسمي (T) سطح المخروط الدوراني الناتج عن دوران (OA) حول المحور (oz)

2 - بين أن معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = z^2$

3 - عين تقاطع (T) و (S) يطلب الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة

4 - أحد الأشكال التالية يمثل تقاطع (T) مع مستوي معادلته $x = 1$ أي هذه الأشكال مناسب ؟



الشكل (3)

الشكل (2)

الشكل (1)

الحل - 8

1 - $\vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

لدينا : $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 0 - 5(5) + 5(5) = 0$ إذن : $\vec{OA} \perp \vec{AB}$

لدينا (OA) و (AB) متعامدان إذن : المستقيم (OA) هو مماس للدائرة (C)

2 - (T) مخروط دوراني ، محوره (oz) إذن : معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ حيث $k \in \mathbb{R}$

(T) $A \in (T)$: $(0)^2 + (5)^2 = k^2 (5)^2$

أي : $25 = 25 k^2$

منه : $k^2 = 1$

نتيجة : معادلة (T) هي : $x^2 + y^2 = z^2$

3 - لتعين معادلة سطح الكرة (S) :

$AB = \sqrt{0 + 25 + 25} = \sqrt{50}$

نصف القطر :

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 10)^2 = (\sqrt{50})^2$

منه معادلة (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 100 = 50$$

أي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0$$

أي :

التقاطع : لتكن $M(x; y; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و (T) إذن :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 2z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = z^2 \\ z^2 - 10z + 25 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (z - 5)^2 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

معادلة دائرة مركزها $(0; 0)$ و نصف قطرها 5 في المستوي ذو المعادلة $z = 5$ نتيجة : (T) و (S) ينقطعان في دائرة مركزها $(0; 0; 5)$ و نصف قطرها 5 من المستوي ذو المعادلة $z = 5$ 4 - لنبحث تحليليا عن تقاطع (T) و المستوي ذو المعادلة $x = 1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 1 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = \pm \sqrt{1 + y^2} \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \text{و هي معادلة قطع زائد في المستوي ذو المعادلة } x = 1$$

نتيجة : الشكل المناسب هو الشكل (3)

التمرين 9لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x; y)$ مع المستوي ذو المعادلة $z = k$ تقاطع (S) مع المستوي الذي يشمل $A(0; 1 - k; k)$ و شعاع توجيهه

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

عين معادلة ديكرتية لـ (S)

تحليل 9نبحث عن التمثيل الوسيط للمستقيم الذي يشمل $A(0; 1 - k; k)$ و شعاع توجيهه له كذا يلي :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 + k \\ z - k \end{pmatrix} \quad \text{لتكن نقطة } M(x; y; z) \text{ إذن :}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 - k \\ z = k \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x = t \\ y - 1 + k = 3t \\ z - k = 0 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

لنبحث الآن عن عبارة $f(x; y)$:

$$f(x; y) = k \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} z = f(x; y) \\ z = k \end{cases}$$

نتيجة : يكفي أن نبحث عن عبارة k بدلالة x و y

$$\begin{cases} 3x = 3t \\ y = 3t + 1 - k \end{cases} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 - k \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$3x - y = 3t - 3t - 1 + k \quad \text{منه :}$$

$$3x - y = -1 + k \quad \text{أي :}$$

$$k = 3x - y + 1 \quad \text{ي :}$$

$$f(x; y) = 3x - y + 1 \quad \text{نتيجة :}$$

$$z = 3x - y + 1 \quad \text{منه معادلة (S) هي :}$$

$$3x - y - z + 1 = 0 \quad \text{ملاحظة : (S) عبارة عن مستوي معادلته}$$

التمرين 10

$$z = x^2 \quad \text{لتكن (S) مساحة معادلتها}$$

$$1 - \text{عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لـ } (x \circ y)$$

$$2 - \text{عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لـ } (x \circ z)$$

الحل 10

$$1 - \text{ليكن } (\pi) \text{ مستوي موازي لـ } (x \circ y) \text{ إذن معادلته } z = k \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

$$(I) \begin{cases} x^2 = k \\ z = k \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} z = x^2 \\ z = k \end{cases}$$

نميز الحالات التالية :

$$\text{الأولى : } k < 0 \text{ الجملة (I) لا تقبل حولا إذن : } (S) \cap (\pi) = \emptyset$$

$$\text{الثانية : } k = 0 \text{ الجملة (I) تكافئ} \quad \begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{إذن : } (S) \cap (\pi) \text{ هو المستقيم الذي تمثله الوسيطى حيث } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{الثالثة : } k > 0 \text{ الجملة (I) تكافئ} \quad \begin{cases} x^2 = (\sqrt{k})^2 \\ z = k \end{cases}$$

$$\text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ z = k \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = \sqrt{k} \\ z = k \end{cases}$$

$$\text{إذن : } (S) \cap (\pi) \text{ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثلهما الوسيطيين هما}$$

$$\text{حيث } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ y = t \\ z = k \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = \sqrt{k} \\ y = t \\ z = k \end{cases}$$

$$2 - \text{ليكن (Q) المستوي الموازي لـ } (x \circ z) \text{ إذن معادلته } y = k$$

$$\text{إذن : } (S) \cap (Q) \text{ هو القطع المكافئ الذي معادلته } z = x^2 \text{ من المستوي ذو المعادلة } y = k \quad \begin{cases} z = x^2 \\ y = k \end{cases}$$

التمرين 11

$$\text{لتكن (S) المساحة التي معادلتها } z = x^2 + xy$$

$$1 - \text{بين أن مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة } z = 0 \text{ هو اتحاد مستقيمين يطلب تعيينهما .}$$

$$2 - \text{أدرس مقاطع (S) بالمستوي الذي معادلته } z = k \text{ حيث } k \in \mathbb{R}^*$$

الحل 11

$$1 - \begin{cases} z = x^2 + xy \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x + y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

نتيجة : تقاطع (S) و المستوي ذو المعادلة $z = 0$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثلهما الوسيطين

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

2- ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $z = k$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} x^2 + xy = k \\ z = k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z = x^2 + xy \\ z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = k - x^2 \\ z = k \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y = \frac{k - x^2}{x} \\ z = k \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \\ z = k \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$k \neq 0 \text{ لأن } \begin{cases} x \neq 0 \\ y = \frac{k - x^2}{x} \\ z = k \end{cases} \text{ يكافئ}$$

نتيجة : $(S) \cap (\pi)$ هو المنحنى ذو المعادلة $y = \frac{k - x^2}{x}$ في المستوي ذو المعادلة $z = k$

تمرين 12

نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = \sqrt{|x - y|}$
كتب معادلة مستوي التناظر لـ (S)

الحل 12

تكن $M(x; y; z)$ نقطة من (S) إذن $z = \sqrt{|x - y|}$
أو $\sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|}$

نن : النقطة $M'(y; x; \sqrt{|y - x|})$ تنتمي إلى (S)

ثبت أن النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة إلى المستوي (π) الذي معادلته $x - y = 0$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ سينا هو شعاع ناظمي لـ } (\pi) \\ \text{من جهة أخرى : } \vec{MM'} = \begin{pmatrix} y - x \\ x - y \\ \sqrt{|y - x|} - \sqrt{|x - y|} \end{pmatrix} \text{ أي } \vec{MM'} = \begin{pmatrix} y - x \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MM'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ إذن } \vec{MM'} = \begin{pmatrix} (y - x) \times (1) \\ (y - x) \times (-1) \\ (y - x) \times (0) \end{pmatrix}$$

نتيجة : $\vec{MM'}$ شعاع ناظمي لـ (π) أي $\vec{MM'}$ عمودي على (π)

لتكن w منتصف القطعة $[MM']$ إذن :

$$w \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x+y}{2}; \sqrt{|x-y|} \right) \text{ أي } w \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x+y}{2}; \frac{\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-x|}}{2} \right)$$

إذن : $w \in (\pi)$ لأن $\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{2} = 0$ (تحقق معادلة المستوي (π))

خلاصة : $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \text{ شعاع ناظمي لـ } (\pi) \\ [AM'] \text{ تنتمي إلى } (\pi) \end{array} \right\}$

إذن : M' هي نظيرة M بالنسبة إلى (π)
منه : المستوي (π) ذو المعادلة $x - y = 0$ هو مستوي تناظر لـ (S)

التمرين 13

لتكن f دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين x و y معرفة كما يلي :

$$f(x; y) = x e^{-x^2-y^2} + 3$$

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x; y)$

1 - بين أن (S) تقبل المستوي ذو المعادلة $y = 0$ كمستوي تناظر .

2 - لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(x; 0)$

أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج القيمة الحدية العظمى لـ (S)

الحل 13

1 - ليكن (π) المستوي الذي معادلته $y = 0$

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من المساحة (S) إذن : $z = x e^{-x^2-y^2} + 3$

لدينا نظيرة M بالنسبة إلى المستوي (π) هي $M'(x; -y; z)$

أي $M'(x; -y; x e^{-x^2-y^2} + 3)$

منه $M' \in (S)$ إذن : (π) هو مستوي تناظر لـ (S)

2 - تغيرات الدالة g :

$$g(x) = f(x; 0) \quad \text{يكافئ} \quad g(x) = x e^{-x^2+0} + 3$$

$$g(x) = x e^{-x^2} + 3 \quad \text{يكافئ}$$

g معرفة على \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} + 3 = 3$$

$$g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$1 - 2x^2$	-	0	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	3	$3 - \frac{1}{\sqrt{2}e}$		$3 + \frac{1}{\sqrt{2}e}$	3

$$g\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{2}e} + 3$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}e} + 3$$

نتيجة : الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى على المجال \mathbb{R} من أجل $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و قيمتها $3 + \frac{1}{\sqrt{2}e}$

منه : المساحة (S) تبلغ قيمة حدية عظمى من أجل $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + 3 \quad \text{أي}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}e} e^{-y^2} + 3 \quad \text{أي}$$

منه يكون z أكبر ما يمكن من أجل $y = 0$ (بدراسة الدالة $p(y) = e^{-y^2}$)

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}e} + 3 \quad \text{أي}$$

خلاصة : (S) تبلغ قيمة حدية عظمى عند النقطة $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}e} + 3\right)$

التمرين 14

لتكن A نقطة إحداثياتها (1 ; 3 ; 0)

نعتبر (S) المساحة التي معادلتها $z = (x-1)^2 + (y-3)^2$

1 - أكتب معادلة (S) في المعظم $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2 - استنتج طبيعة (S) و عناصرها المميزة .

الحل 14

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \\ Z = z \end{cases} \quad \text{نضع}$$

إذن : معادلة (s) في المعظم $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هي : $Z = X^2 + Y^2$

2 - (S) لها المعادلة $Z = X^2 + Y^2$ إذن : (S) هي مجسم مكافئ محوره المستقيم الموازي للمحور (OZ) و الذي يشمل

النقطة $A(1; 3; 0)$

التمرين 15

نعتبر الدالة f حيث $f(x; y) = \ln|y - x^2|$

1 - عين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{R}^2 حتى تكون من أجلها f غير معرفة

2 - لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x; y)$

أدرس مقاطع المساحة (S) مع المستوي ذو المعادلة $z = k$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$

الحل 15

$$\begin{aligned} f - 1 \text{ غير معرفة يكافئ } y - x^2 &= 0 \\ & \text{يكافئ } y = x^2 \end{aligned}$$

نتيجة : f غير معرفة من أجل كل الثنائيات من الشكل $(x; x^2)$ حيث $x \in \mathbb{R}$

2 - ليكن (π) المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} k = \ln|y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} z = \ln|y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^k = |y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} e^k = x^2 - y \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} e^k = y - x^2 \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - e^k \\ z = k \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y = e^k + x^2 \\ z = k \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : $(S) \cap (\pi)$ هو اتحاد المنحنيين اللذين معادلاتهما $y = x^2 - e^k$ و $y = x^2 + e^k$ من المستوي $z = k$

التمرين 16

لتكن (T) المساحة التي معادلتها $z = yx^2$ حيث $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$

1 - (a) تحقق أن إذا كانت $M(x; y; z)$ نقطة من (T) فإن $N(-x; y; z)$ نقطة من (T)

ثم استنتج مستوي تناظر لـ (T)

- (b) بين أن النقطة $O(0; 0; 0)$ مركز تناظر لـ (T)
 (a - 2) ما هي طبيعة منحنيات تقاطع (T) مع المستويات الموازية لـ $(x \circ z)$
 (b) ما هي طبيعة منحنيات تقاطع (T) مع المستويات الموازية لـ $(y \circ z)$
 (a - 3) عين تقاطع (T) مع المستوي ذو المعادلة $z = 0$
 (b) من أجل $k > 0$ نضع K النقطة التي إحداثياتها $(0; 0; k)$
 عين في المعظم $(k; \vec{i}; \vec{j})$ معادلة منحنى التقاطع بين (T) و المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k > 0$

الحل - 16

$$(a - 1) \quad M(x; y; z) \text{ نقطة من } (T) \text{ إذن : } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = yx^2 \end{cases}$$

$$\text{لتكن } N(-x; y; z) \text{ لدينا } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} -1 \leq -x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{من جهة أخرى } y(-x)^2 = yx^2 = z$$

$$\text{إذن : } N(-x; y; z) \text{ تنتمي إلى } (T)$$

نتيجة : المستوي ذو المعادلة $x = 0$ هو مستوي تناظر للمساحة (S)

$$(b) \text{ لتكن } M(x; y; z) \text{ نقطة من } (T) \text{ إذن : } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = yx^2 \end{cases}$$

$$\text{لدينا } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} -1 \leq -x \leq 1 \\ -1 \leq -y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{من جهة أخرى : } -y(-x)^2 = -yx^2 = -z$$

$$\text{نتيجة : النقطة } N(-x; -y; -z) \text{ تنتمي إلى } (T)$$

$$\text{منه النقطة } O(0; 0; 0) \text{ هي مركز تناظر لـ } (T)$$

$$(a - 2) \text{ ليكن } (\pi) \text{ المستوي الموازي لـ } (x \circ z) \text{ معادلته } y = k \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} z = yx^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ y = k \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} z = kx^2 \\ y = k \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

مناقشة :

$$\text{إذا كان } k \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ فإن } (\pi) \cap (T) = \emptyset$$

$$\text{إذا كان } k \in [-1; 1] \text{ فإن } (\pi) \cap (T) \text{ هو المنحنى الذي معادلته } z = kx^2$$

$$(b) \text{ ليكن } (Q) \text{ المستوي الموازي لـ } (y \circ z) \text{ معادلته } x = k$$

$$\begin{cases} z = yx^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ x = k \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} z = k^2 y \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ x = k \end{cases}$$

مناقشة :

$$\text{إذا كان } k \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ فإن } (T) \cap (Q) = \emptyset$$

$$\text{إذا كان } k \in [-1; 1] \text{ فإن } (T) \cap (Q) \text{ هو القطعة المستقيمة ذات التمثيل الوسيطى } \begin{cases} x = k \\ z = k^2 t \\ y = t \end{cases}$$

$$\text{حيث } t \in [-1; 1]$$

$$3 - \text{ ليكن } (P) \text{ المستوي ذو المعادلة } z = 0$$

$$\begin{cases} z = yx^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} yx^2 = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : $(T) \cap (P)$ هو اتحاد القطعتين المستقيمتين المعرفتين بالتمثيلين الوسيطين

$$t \in [-1; 1] \text{ حيث } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = -t \end{cases}$$

(b) ليكن (R) المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k > 0$

$$\begin{cases} k = yx^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = k; k > 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} z = yx^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = k; k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = yx^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 < y \leq 1 \\ z = k; k > 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{k} x^2 \\ -1 \leq x \leq 1; x \neq 0 \\ 0 < y \leq 1 \\ z = k; k > 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : معادلة تقاطع (T) و المستوي (R) هي :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{k} x^2 \\ -1 \leq x \leq 1; x \neq 0 \\ 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

لندرس تغيرات الدالة $f(x) = \frac{1}{k} x^2$ على المجال $[-1; 1]$ حيث $k > 0$

$$f'(x) = \frac{2x}{k}$$

x	-1	0	1
f'(x)	-	0	+
f(x)	1/k	0	1/k

لدينا : $\frac{1}{k} \leq 1$ يكافئ $k \geq 1$ لأن $k > 0$

منه النتائج التالية :

1 - إذا كان $k \geq 1$ فإن $(T) \cap (R)$ هو قوس من المستوي (R)

معادلته $\begin{cases} y = \frac{1}{k} x^2 \\ -1 \leq x \leq 1; x \neq 0 \\ 0 < y \leq 1 \end{cases}$ رأساه $A(-1; 1/k; k)$ ، $B(1; 1/k; k)$ باستثناء النقطة $K(0; 0; k)$

2 - إذا كان $0 < k < 1$ فإن $\frac{1}{k} > 1$

إذن : جدول تغيرات الدالة f يصبح :

x	-1	$-\sqrt{k}$	0	\sqrt{k}	1
f'(x)	-	-	0	+	+
f(x)	$1/k$				$1/k$

في هذه الحالة $(R) \cap (T)$ هو قوس من المستوي (R) معادلته

$$K(0; 0; k) \text{ ماعدا النقطة } \begin{cases} y = \frac{1}{k} x^2 \\ -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k} ; x \neq 0 \\ 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

التمرين 17-

(C) هو سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$

a عدد حقيقي. نسمي Σ_a مقطع (C) بالمستوي (P_a) الذي معادلته $x = a$

و نسمي A النقطة التي احداثياتها $(a; 0; 0)$

- 1- بين أن Σ_0 هو اتحاد مستقيمين (D_1) و (D_2) شعاعا توجيههما $\vec{u}_1 = \lambda \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{u}_2 = \lambda \vec{j} - \vec{k}$
- 2- M نقطة من المستوي (P_a) احداثياتها $(y; z)$ في المعلم $(A; \vec{j}; \vec{k})$ و $(Y; Z)$ في المعلم $(A; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$ بين أن $y = \lambda Y + \lambda Z$ و $z = Y - Z$

- 3- استنتج أن من أجل $a \neq 0$ فإن Σ_a في المعلم $(A; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$ له المعادلة :

$$Y = \frac{c}{Z} \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي غير معدوم}$$

الحل 17-

- 1- من أجل $a = 0$ فإن نقط المقطع Σ_0 هي حلول الجملة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\lambda z \\ x = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y = \lambda z \\ x = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ حيث } \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda t \\ z = t \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda t \\ z = t \end{cases} \text{ يكافئ}$$

نتيجة : Σ_0 هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلهما الوسيطيين هما

$$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ إن شعاعي توجيههما على الترتيب } \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda t \\ z = t \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = \lambda \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{n}_2 = -\lambda \vec{j} + \vec{k} \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} \vec{n}_1 = 0 \vec{i} + \lambda \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{n}_2 = 0 \vec{i} - \lambda \vec{j} + \vec{k} \end{cases} \text{ أي}$$

بما أن \vec{u}_2 هو أيضا شعاع توجيه لأن $\vec{n}_2 \parallel -\vec{n}_2$ فإن (D_1) و (D_2) لهما أشعة التوجيه التالية $\vec{u}_2 = \lambda \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{u}_1 = \lambda \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{AM} = y \vec{j} + z \vec{k} \dots\dots (\alpha) - 2 \text{ في المعلم } (A; \vec{j}; \vec{k})$$

$$\vec{AM} = Y \vec{u}_1 + Z \vec{u}_2 \text{ في المعلم } (A; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$$

نعوض \vec{u}_1 و \vec{u}_2 بدلالة \vec{j} و \vec{k} فنحصل على مايلي :

$$\vec{AM} = Y(\lambda \vec{j} + \vec{k}) + Z(\lambda \vec{j} - \vec{k})$$

$$= Y \lambda \vec{j} + Y \vec{k} + Z \lambda \vec{j} - Z \vec{k}$$

$$= (Y \lambda + Z \lambda) \vec{j} + (Y - Z) \vec{k}$$

$$\vec{AM} = y\vec{j} + z\vec{k}$$

لكن

بالمطابقة نحصل على : $\begin{cases} y = Y\lambda + Z\lambda \\ z = Y - Z \end{cases}$ و هو المطلوب3 - لنبحث عن Σ_a من أجل $a \neq 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = a \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} a^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + (\lambda Y + \lambda Z)^2 - \lambda^2 (Y - Z)^2 \\ x = a \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} a^2 + \lambda^2 Y^2 + 2\lambda^2 YZ + \lambda^2 Z^2 = \lambda^2 Y^2 - 2\lambda^2 YZ + \lambda^2 Z^2 \\ x = a \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} a^2 = -4\lambda^2 YZ \\ x = a \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} Y = \frac{a^2}{-4\lambda^2 Z} \\ x = a \end{cases}$$

يكافئ

$$\text{نضع } c = \frac{a^2}{-4\lambda^2} \text{ حيث } c \neq 0 \text{ إذن : } \begin{cases} Y = \frac{c}{Z} \\ x = a \end{cases}$$

نتيجة : في المعلم $(A; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$ Σ_a له المعادلة $Y = \frac{c}{Z}$ حيث c و a أعداد حقيقية غير معدومة .التمرين 18(D) و (T) مستقيمان متعامدان و ليسا من نفس المستوي حيث (D) يشمل النقطة $A(0; 0; 1)$ و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ هو شعاع توجيه له .(T) يشمل النقطة $B(0; 0; -1)$ و $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ شعاع توجيه له .

1 - تحقق أن (D) و (T) متعامدان و أنهما ليس من نفس المستوي فعلا

2 - لتكن Σ مجموعة نقط الفضاء المتساوية البعد عن (D) و (T)تحقق أن O تنتمي إلى Σ 3 - لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء

(a) أحسب بعد النقطة M عند (D) و (T)

(b) استنتج أن M تنتمي إلى Σ إذا وفقط إذا كان $xy + 2z = 0$ (c) استنتج تقاطع Σ مع المستويات العمودية على (AB)(d) أدرس تقاطع Σ مع المستويات العمودية على المحور $(0; \vec{i})$ ثم المحور $(0; \vec{j})$ الحل - 18

$$1 - \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه لـ (D) و } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ شعاع توجيه لـ (T)}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - 1 + 0 = 0 \text{ إذن : } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ متعامدان}$$

منه : (D) عمودي على (T)

لنعين التمثيل الوسيط لكل من (D) و (T)

$$\begin{cases} x - 0 = t \\ y - 0 = t \\ z - 1 = 0 \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \text{ حيث } t \in \mathbb{R} \text{ هو تمثيل وسيطي لـ (D)}$$

$$\begin{cases} x - 0 = k \\ y - 0 = -k \\ z + 1 = 0 \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = -1 \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R} \text{ هو تمثيل وسيطي لـ (T)}$$

نتيجة : لا توجد أي نقطة مشتركة بين (D) و (T) لأن نقط المستقيم (D) لها راقم $z = 1$ و نقط المستقيم (T) لها راقم $z = -1$

خلاصة : $\{(D) \text{ و } (T) \text{ متعامدان} \}$ إذن : $(D) \text{ و } (T) \text{ ليسا من نفس المستوى}$
 $(D) \cap (T) = \emptyset$

2 - لنكن H مسقط النقطة O على المستقيم (D) حيث $H(t; t; 1)$
 و K مسقط النقطة O على المستقيم (T) حيث $K(k; -k; -1)$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{OH} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{OK} = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{OH} \\ \vec{v} \perp \vec{OK} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1(t) + 1(t) + 0(1) = 0 \\ 1(k) - 1(-k) + 0(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} 2t = 0 \\ 2k = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ k = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : $H(0; 0; 1)$ و $K(0; 0; -1)$

منه : $OH = \sqrt{0+0+1} = 1$ و $OK = \sqrt{0+0+1} = 1$

إذن : بعد النقطة O عن كل من المستقيمين (D) و (T) هو 1

إذن : O تنتمي إلى Σ (نفس البعد عن (D) و عن (T))

3 - لنكن $M(x; y; z)$

نضع $\left. \begin{array}{l} \sqrt{(t; t; 1)} \text{ المسقط العمودي لـ } M \text{ على } (D) \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي} \\ P(k; -k; -1) \text{ المسقط العمودي لـ } M \text{ على } (T) \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي} \end{array} \right\}$

$$\vec{PM} \begin{pmatrix} x-k \\ y+k \\ z+1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{NM} \begin{pmatrix} x-t \\ y-t \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{NM} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{PM} = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{NM} \\ \vec{v} \perp \vec{PM} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1(x-t) + 1(y-t) + 0(z-1) = 0 \\ 1(x-k) - 1(y+k) + 0(z+1) = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x-t+y-t=0 \\ x-k-y-k=0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x+y=2t \\ x-y=2k \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ k = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : $N\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y; \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y; 1\right)$ و $P\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y; \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y; -1\right)$

$$\vec{PM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ z+1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{NM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \text{منه :}$$

$$NM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right)^2 + (z-1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 - 2xy + y^2) + z^2 - 2z + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) + z^2 - 2z + 1}$$

و هي عبارة بعد النقطة M عن (D)

$$PM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 + (z+1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) + z^2 + 2z + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + z^2 + 2z + 1}$$

و هي عبارة بعد النقطة M عن (T)

(b) M تنتمي إلى Σ يكافئ NM = PM

كافئ NM² = PM² (لأن NM > 0 و PM > 0)

$$\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) + z^2 - 2z + 1 = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + z^2 + 2z + 1$$

$$-xy - 2z = xy + 2z$$

$$0 = xy + 2z + xy + 2z$$

$$2xy + 4z = 0$$

$$xy + 2z = 0 \text{ و هو المطلوب}$$

(c) المستويات العمودية على (AB) لها \vec{AB} كشعاع ناظمي

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} \quad \text{أي منه}$$

$$\vec{n} \parallel \vec{AB} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{منه : كل مستوي عمودي على (AB) له الشعاع ناظمي له لأن } \vec{n} \parallel \vec{AB}$$

إذن : المستويات العمودية على (AB) لها المعادلة الديكارتية التالية : $0x + 0y + z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

أي بصفة عامة فإن كل مستوي عمودي على (AB) له المعادلة $z = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$ (بوضع $m = -\alpha$)

لنبحث إذن عن تقاطع Σ و المستويات ذات المعادلة $z = m$ كمايلي :

$$\begin{cases} xy + 2m = 0 \\ z = m \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} xy + 2z = 0 \\ z = m \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} xy = -2m \\ z = m \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $m = 0$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{الجملة (I) تكافئ}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

إذن : التقاطع هو اتحاد مستقيمين تمثيلاهما الوسيطيين كمايلي :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{(هما محوري الفواصل و التراتيب)}$$

الحالة (2) $m \neq 0$

$$\begin{cases} y = \frac{-2m}{x} \\ z = m \end{cases} \text{ الجملة (I) تكافئ}$$

إذن : التقاطع هو المنحنى ذو المعادلة $y = \frac{-2m}{x}$ في المستوى الذي معادلته $z = m$ (قطع زائد)

(c) ليكن (π) مستوي عمودي على المحور $(o; \vec{i})$ إذن : (π) له المعادلة $x = m$

$$\begin{cases} m y + 2 z = 0 \\ x = m \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x y + 2 z = 0 \\ x = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{-m}{2} y \\ x = m \end{cases} \text{ يكافئ}$$

إذن : $\Sigma \cap (\pi)$ هو المنحنى ذو المعادلة $z = \frac{-m}{2} y$ في المستوى (π) (هو مستقيم من المستوى (π))

ليكن (Q) مستوي عمودي على المحور $(o; \vec{j})$ إذن : (Q) له المعادلة $y = m$

$$\begin{cases} m x + 2 z = 0 \\ y = m \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x y + 2 z = 0 \\ y = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{-m}{2} x \\ y = m \end{cases} \text{ يكافئ}$$

إذن : $\Sigma \cap (Q)$ هو المنحنى ذو المعادلة $z = \frac{-m}{2} x$ في المستوى (Q) (مستقيم من المستوى (Q))

التمرين - 19

OABC رباعي وجوه حيث $OA = OB = OC = a$ مع a عدد حقيقي موجب تماما و الوجوه الثلاثة OAB ،

OAC ، OBC هي مثلثات قائمة في النقطة O

لتكن M نقطة من [OA] حيث $AM = x$

نسمي (π) المستوى الذي يشمل M و يوازي المستقيمين (AB) و (OC) و يقطع المستقيمتين (AC) ، (CB) ،

(OB) على الترتيب في النقط N ، P ، Q

1 - برهن أن الرباعي MNPQ مستطيل .

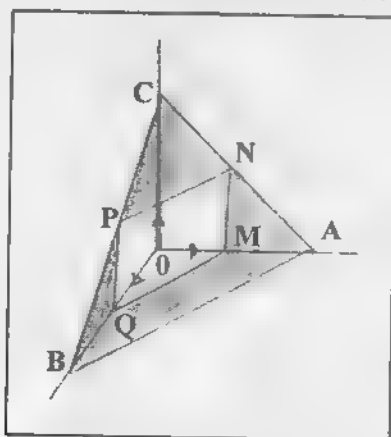
2 - أحسب بدلالة x المساحة $A(x)$ للمستطيل MNPQ

3 - أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = A(x)$ و مثل منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ للمستوي .

4 - من أجل أي قيمة لـ x تكون المساحة $A(x)$ أكبر ما يمكن ؟

الحل - 19

الإنشاء :



ننسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ محاوره (OA) ، (OB) ، (OC) حيث $\|\vec{i}\| = 1$

بما أن $x = AM$ و $OA = a$ فإن إحداثيات النقط M و Q هي $M(a-x; 0; 0)$ ، $Q(0; a-x; 0)$

و إحداثيات النقط A ، B ، C هي $A(a; 0; 0)$ ، $B(0; a; 0)$ ، $C(0; 0; a)$

1 - لنبحث عن إحداثيات كل من N و P كمايلي :

N هي تقاطع (AC) و (MN)

P هي نقطة تقاطع (BC) و (PQ)

إذن : يكفي إيجاد معادلة كل من (AC) ، (BC) ، (MN) ، (PQ)

معادلة (MN)

\vec{OC} شعاع توجيه لـ (MN) إذن $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه لـ (MN)

و $M(a-x; 0; 0)$ نقطة من (MN) إذن التمثيل الوسيطى لـ المستقيم (MN) هو : $\begin{cases} X - (a-x) = 0 \\ Y - 0 = 0 \\ Z - 0 = t \end{cases}$ أي $\begin{cases} X = a-x \\ Y = 0 \\ Z = t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

معادلة (PQ)

\vec{OC} شعاع توجيه لـ (PQ) إذن $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه لـ (PQ)

و $Q(0; a-x; 0)$ نقطة من (PQ) :

إذن : $\begin{cases} X - 0 = 0 \\ Y - (a-x) = 0 \\ Z - 0 = k \end{cases}$ منه $\begin{cases} X = 0 \\ Y = a-x \\ Z = k \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

معادلة (AC)

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-a \\ 0-0 \\ a-0 \end{pmatrix}$ منه $\vec{AC} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AC)

(AC) يشمل النقطة $A(a; 0; 0)$ إذن :

منه $\begin{cases} X - a = -a m \\ Y - 0 = 0 \\ Z - 0 = a m \end{cases}$ حيث $m \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} X = a - a m \\ Y = 0 \\ Z = a m \end{cases}$

معادلة (BC)

$\vec{BC} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-a \\ a-0 \end{pmatrix}$ منه $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (BC)

(BC) يشمل $B(0; a; 0)$

إذن : $\begin{cases} X - 0 = 0 \\ Y - a = -a q \\ Z - 0 = a q \end{cases}$ منه $\begin{cases} X = 0 \\ Y = a - a q \\ Z = a q \end{cases}$ حيث $q \in \mathbb{R}$

البحث عن N حيث N هي $(AC) \cap (MN)$:

منه $\begin{cases} a-x = a - a m \\ Y = 0 \\ t = a m \end{cases}$ $\begin{cases} -x = -a m \\ Y = 0 \\ t = a m \end{cases}$

أي $\begin{cases} m = x/a \\ Y = 0 \\ t = a(x/a) = x \end{cases}$

نتيجة : بتعويض $t \rightarrow x$ في التمثيل الوسيطى لـ (MN)

نحصل على $\begin{cases} X = a-x \\ Y = 0 \\ Z = x \end{cases}$

منه : $N(a-x; 0; x)$

البحث عن إحداثيات P حيث P هي $(BC) \cap (PQ)$:

منه $\begin{cases} X = 0 \\ a - a q = a - x \\ a q = k \end{cases}$ $\begin{cases} X = 0 \\ a q = x \\ a q = k \end{cases}$

$$\begin{cases} X = 0 \\ q = x/a \\ k = a(x/a) = x \end{cases} \text{ أي}$$

بتعويض k بـ x في التمثيل الوسيطى لـ (PQ) نحصل على :

$$P(0; a-x; x) \quad \text{منه} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = a-x \\ Z = x \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} : \text{ إذن } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ أي} \\ \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ أي} \end{cases} \quad \text{نتيجة :} \quad \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} a-x-(a-x) \\ 0-0 \\ x-0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ a-x-(a-x) \\ x-0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM} : \text{ إذن } \begin{cases} \overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ منه} \\ \overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ منه} \end{cases} \quad \begin{cases} \overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix} a-x-0 \\ 0-(a-x) \\ 0-0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} a-x-0 \\ 0-(a-x) \\ 0-0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0(a-x) + 0(x-a) + x(0) = 0 \quad \text{لدينا}$$

إذن : \overrightarrow{MN} و \overrightarrow{PM} متعامدان .

خلاصة : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$ و \overrightarrow{PN} عمودي على \overrightarrow{MN} إذن الرباعي $MNPQ$ مستطيل .

$$\overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :} \quad \begin{aligned} PN &= \sqrt{(a-x)^2 + (x-a)^2 + 0} \\ &= \sqrt{2(a-x)^2} \\ &= |a-x| \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$a > x \quad \text{لأن} \quad = (a-x)\sqrt{2}$$

$$MN = \sqrt{0+0+x^2} = |x| = x \quad \text{إذن :} \quad \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

نتيجة : $A(x) = PN \times MN = x(a-x)\sqrt{2}$ مقدر بوحدة القياس .

$$f(x) = x(a-x)\sqrt{2} \quad \text{يكافئ} \quad f(x) = A(x) \quad - 3$$

$$f(x) = a x \sqrt{2} - x^2 \sqrt{2} \quad \text{يكافئ}$$

بما أن M نقطة من القطعة المستقيمة $[OA]$ فإن $0 \leq x \leq a$

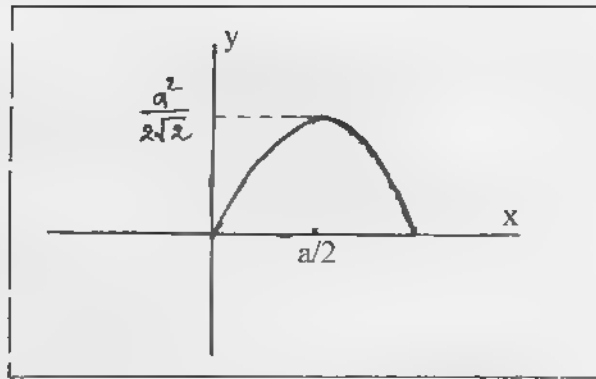
إذن : ندرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; a]$ كمايلي :

$$f(a) = 0 \quad ; \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = a\sqrt{2} - 2x\sqrt{2} = \sqrt{2}(a-2x)$$

x	0	$a/2$	a
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$	0

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} \left(a - \frac{a}{2}\right) \sqrt{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$$



4 - تكون المساحة $A(x)$ أكبر ما يمكن من أجل $x = a/2$ و قيمتها عندئذ هي $A(x) = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$ مقدرة بوحدة القياس .
التمرين 20

ليكن (C) سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = z^2$

1 - بين أن المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيط $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3} t \\ z = 2 t \end{cases}$ هو مستقيم مولد لـ (C)

2 - ليكن (π) المستوي الذي معادلته $y = 3$

نسمي (H) تقاطع (C) مع المستوي (π)

لتكن A النقطة ذات الإحداثيات $(0; 3; 0)$

(a) أكتب في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$ معادلة (H)

(b) بين أن توجد دالة f بحيث يكون (H) هو اتحاد المنحنيين اللذين معادلاتهما $z = f(x)$ و $z = -f(x)$ ثم مثل

(H) في المستوي (π)

(c) ليكن \vec{u} و \vec{v} شعاعين حيث $\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases}$

بين أن إذا كانت $M(x; y; z)$ في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$ فإن : $\vec{AM} = \frac{x-z}{2} \vec{u} + \frac{x+z}{2} \vec{v}$

(d) لتكن $M(X; Z)$ في المعلم $(A; \vec{u}; \vec{v})$

أثبت أن $M \in (H)$ معناه $XZ = -9/4$

الحل - 20

1 - لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من (D) إذن $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3} t \\ z = 2 t \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = t^2 + (\sqrt{3} t)^2$

أي $x^2 + y^2 = t^2 + 3 t^2$

أي $x^2 + y^2 = 4 t^2$

أي $x^2 + y^2 = (2 t)^2$

أي $x^2 + y^2 = z^2$

أي M تنتمي إلى (C)

نتيجة : المستقيم (D) محتواة في (C) إذن : (D) هو مولد لـ (C)

2 - (a) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من H

إذن : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$ - يكافئ $\begin{cases} x^2 + 9 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$

إذن : معادلة (H) في المستوي (π) ذو المعادلة $y = 3$ هي $z^2 = x^2 + 9$ في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$

(b) لتكن المعادلة $z^2 = x^2 + 9$ في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$

$z^2 = x^2 + 9$ يكافئ $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 9} \\ \text{أو} \\ z = -\sqrt{x^2 + 9} \end{cases}$

نعرف الدالة f على \mathbb{R} بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ إذن $-f(x) = -\sqrt{x^2 + 9}$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 9} \\ \text{أو} \\ z = -\sqrt{x^2 + 9} \end{cases} \quad \text{معادلة (H) في المعلم } (A; \vec{i}; \vec{k}) \text{ هي :}$$

إذن : (H) هو اتحاد المنحنيين الذين معادلاتهما $z = f(x)$ و $z = -f(x)$ كمايلي :
تغيرات الدالة f على \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

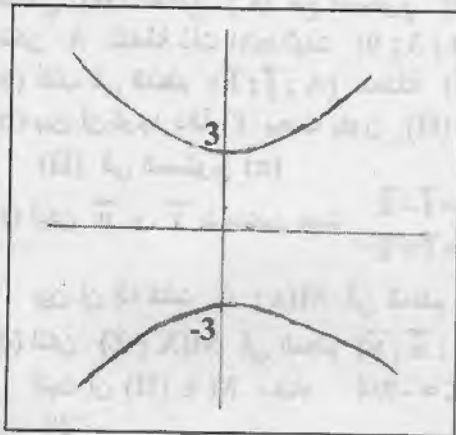
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

$$f(0) = \sqrt{0 + 9} = 3$$

منه المنحنى (H) كمايلي :



$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} \\ \vec{k} = \vec{v} - \vec{i} \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases} \quad (c)$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{k} = \vec{v} - \vec{i} \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{k} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} \end{cases}$$

يكافئ

$$\vec{AM} = x\vec{i} + z\vec{k}$$

يكافئ $M(x; z)$ في المعلم $(A; \vec{i}; \vec{k})$

$$\vec{AM} = x\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) + z\left(\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}\right)$$

يكافئ

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}x\vec{u} + \frac{1}{2}x\vec{v} + \frac{1}{2}z\vec{v} - \frac{1}{2}z\vec{u}$$

يكافئ

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(x-z)\vec{u} + \frac{1}{2}(x+z)\vec{v}$$

يكافئ

$$(\alpha) \dots \vec{AM} = \frac{x-z}{2}\vec{u} + \frac{x+z}{2}\vec{v}$$

يكافئ

$$\vec{AM} = X\vec{u} + Z\vec{v}$$

(d) $M(X; Z)$ في المعلم $(A; \vec{u}; \vec{v})$ أي

$$\begin{cases} X = \frac{x-z}{2} \\ Z = \frac{x+z}{2} \end{cases}$$

بالمطابقة مع العبارة (α) نحصل على :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ Z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} X + Z = x \\ \frac{1}{2}z = Z - \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x = X + Z \\ \frac{1}{2}z = Z - \frac{1}{2}(X + Z) \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x = X + Z \\ z = 2Z - X - Z \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x = X + Z \\ z = Z - X \end{cases} \quad \text{أي}$$

نتيجة : $M(X; Y)$ تنتمي إلى (H) بكافئ

كافئ

كافئ

كافئ

كافئ

كافئ

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + 9 \\ (Z - X)^2 &= (X + Z)^2 + 9 \\ Z^2 - 2ZX + X^2 &= X^2 + 2ZX + Z^2 + 9 \\ -2ZX &= 2ZX + 9 \\ -4ZX &= 9 \\ XZ &= -9/4 \end{aligned}$$

XZ = -9/4 و هو المطلوب

التمرين 21

f دالة معرفة بـ $f(x; y) = \frac{4x+2}{x^2+y^2+2}$

(S) هي المساحة التي معادلتها $z = f(x; y)$

أدرس تقاطع (S) مع المستويات التي معادلتها $z = 0$ ثم $z = 1$

الحل 21

ليكن (π) المستوي الذي معادلته $z = 0$

$$\begin{cases} \frac{4x+2}{x^2+y^2+2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{كافئ} \quad \begin{cases} z = \frac{4x+2}{x^2+y^2+2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{كافئ}$$

$$\begin{cases} x = -1/2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{كافئ}$$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو المستقيم ذو التمثيل الوسيط $\begin{cases} x = -1/2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z = 1$

$$\begin{cases} \frac{4x+2}{x^2+y^2+2} = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{كافئ} \quad \begin{cases} z = \frac{4x+2}{x^2+y^2+2} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 = 4x + 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{كافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{كافئ}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{كافئ}$$

إذن : $(S) \cap (P)$ هو الدائرة التي مركزها $(2; 0; 1)$ ونصف قطرها 2 من المستوى (P) ذو المعادلة $z = 1$

التمرين 22

(T) مساحة معادلتها $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2$

اختر الاقتراح الصحيح من بين مايلي :

(a) $C(1; 1; -2)$ تنتمي إلى (T)

(b) (T) هو سطح مخروط -وراني محوره $(o; \vec{j})$

(c) المستقيم (D) الذي يشمل O وشعاع توجيهه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ مولد لـ (T)

الحل 22

(a) نعوض إحداثيات النقطة C في معادلة (T) كمايلي : $\frac{1}{2}(-2)^2 = (1)^2 + (1)^2$ أي $2 = 2$

منه معادلة (T) محققة إذن C فعلا تنتمي إلى (T)

(b) $(o; \vec{j})$ ليس محور لـ (T)

(c) هل (d) مولد لـ (T)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن} \quad \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

(D) يشمل O و \vec{u} شعاع توجيه له إذن : (D) له التمثيل الوسيط التالي :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

منه إذا كانت $M(x; y; z)$ نقطة من (D) فإن :

$$x^2 + y^2 = t^2 + t^2 = 2t^2$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} (2t)^2 = \frac{4t^2}{2} = 2t^2 \quad \text{من جهة أخرى}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2 \quad \text{إذن :}$$

منه : M تنتمي إلى (T)

إذن : (D) محتواة في (T)

أي (D) مولد لـ (T) إذن الاقتراح (c) صحيح

التمرين 23

(R) مساحة معادلتها $z = 2x + 0,5y^2 + 4$

هل تقاطع (R) مع المستوى ذو المعادلة $y = 0$ هو :

(a) قطع مكافئ

(b) مستقيم

(c) قطع زائد

(d) جواب آخر

الحل 23

$$\begin{cases} z = 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} z = 2x + 0,5y^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = z - 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} z - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

إذن : تقاطع (R) مع المستوى ذو المعادلة $y = 0$ هو المستقيم الذي تمثله الوسيط $x = \frac{1}{2} z - 2$ حيث $t \in \mathbb{R}$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) مستقيم .

التمرين 24

(π) هي مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث $x - 3y = 5$

هل صحيح أن (π) ليست مساحة ؟

الحل 24

$x - 3y = 5$ يكافئ $x - 3y - 5 = 0$ وهي معادلة مستوي يشمل النقطة $(0; -5/3; 1)$ و $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

التمرين - 25

هل تقاطع مجسم مكافئ معادلته $z = x^2 + y^2$ مع سطح كرة مركزها O هو دائرة ؟

الحل - 25

ليكن (R) المجسم المكافئ ذو المعادلة $z = x^2 + y^2$

نسمي (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α حيث $\alpha > 0$

إذن : معادلة (S) $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$

لنبحث عن تقاطع (S) و (P)

$$\begin{cases} z + z^2 = \alpha^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 + z - \alpha^2 = 0 \dots (1) \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

نحل المعادلة (1) ذات المجهول z حيث $z \geq 0$ لأن $x^2 + y^2 \geq 0$

$$\Delta = 1 + 4\alpha^2$$

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2} \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2}$$

z₁ سالب إذن مرفوض .

نتيجة : (S) و (R) يتقاطعان في مجموعة النقط M(x; y; z) حيث :

$$\begin{cases} z = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2} \end{cases}$$

و هي معادلة دائرة مركزها $\left(0; 0; \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2}\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2}}$

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{2}$$

في المستوي ذو المعادلة

نتيجة : الجواب صحيح .

التمرين - 26

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = 2x(y + 1)$ حيث $0 \leq x \leq 10$; $0 \leq y \leq 12$

هل النقطة A(5; 11; 120) تنتمي إلى (S) ؟

الحل - 26

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases} \quad \text{إذن : } 0 \leq 11 \leq 12 \quad \text{و} \quad 0 \leq 5 \leq 10$$

من جهة أخرى :

$$2(5)(11 + 1) = 10(12) = 120$$

إذن : الشرط $2x(y + 1) = z$ محقق .

منه : A فعلا تنتمي إلى (S)